<u>Thema Nr. 3</u>
(Aufgabengruppe)

Es sind <u>alle</u> Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1

(12 Punkte)

Gegeben sei die Gruppe $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ der invertierbaren 2×2-Matrizen mit Einträgen im Körper $\mathbb{F}_2$.

(a) Listen Sie alle Elemente von G auf.

(b) Zeigen Sie, dass die natürliche Operation von G auf dem Vektorraum $\mathbb{F}_2^2$ einen Isomorphismus

$$\varphi : G \xrightarrow{\sim} \mathrm{Bij}(\mathbb{F}_2^2 \setminus \{0\})$$

induziert. (Hier bezeichne $\mathrm{Bij}(M)$ die Gruppe der Bijektionen auf einer Menge M.)

Zeigen Sie insbesondere, dass G isomorph ist zu S_3, der symmetrischen Gruppe über 3 Elementen.

(c) Zeigen Sie, dass eine Gruppe der Ordnung 30 höchstens 6 Untergruppen der Ordnung 5 haben kann.

Aufgabe 2

(12 Punkte)

(a) Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{Z}$ so, dass $(1 + 2\mathbb{Z}) \cap (2 + 3\mathbb{Z}) \cap (3 + 5\mathbb{Z}) = a + b\mathbb{Z}$.

(b) Bestimmen Sie sämtliche ganzzahlige Lösungen $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ der Gleichung $221\,x + 39\,y = 26$.

(c) Sei $n \geq 2$ und nehmen wir an, dass $p = 2^n + 1$ eine Primzahl ist. Zeigen Sie, dass eine Restklasse $a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ genau dann die Gruppe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ erzeugt, wenn a kein Quadrat in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ist.

Aufgabe 3

(12 Punkte)

Es sei $R := \mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ der Ring der ganzen gaußschen Zahlen.

(a) Bestimmen Sie die Einheitengruppe von R. Führen Sie einen expliziten und vollständigen Beweis der Korrektheit Ihres Ergebnisses.

(b) Zeigen Sie, dass zwei Elemente $w, z \in R$ genau dann assoziiert sind, wenn $w^4 = z^4$ gilt.

(c) Es sei $(1 - i)$ das von dem Element $1 - i$ erzeugte Ideal von R. Bestimmen Sie das Ideal $(1 - i) \cap \mathbb{Z}$.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Es sei K ein Teilkörper von $\mathbb{C}$, sodass $K/\mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung vom Grad 4 mit zyklischer Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ ist. Zeigen Sie, dass dann $i \notin K$ gilt.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass $i \in K$ gilt und betrachten Sie $K/\mathbb{Q}(i)$.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Es sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}, i)$.

(a) Bestimmen Sie den Grad der Körpererweiterung $[K : \mathbb{Q}]$.

(b) Entscheiden und begründen Sie, ob es einen $\mathbb{Q}$-Automorphismus $\varphi : K \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $\varphi(\sqrt[3]{2}) = \sqrt{3}$ gibt.

(c) Entscheiden und begründen Sie, ob die Erweiterung $K/\mathbb{Q}$ galoissch ist.