Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1:

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto xy$. Entscheiden Sie jeweils, ob die Funktion f auf den Mengen

(a) $M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$,

(b) $M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon \sin(x) + \sin(y) = 1\}$,

(c) $M_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \neq 0, y = 1/x\}$

ein globales Minimum und ein globales Maximum besitzt, und bestimmen Sie gegebenenfalls alle Minimal- bzw. Maximalstellen. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(3+2+1 Punkte)

Aufgabe 2:

(a) Bestimmen Sie für alle $y_0 \in \mathbb{R}$ die Lösung $y\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$y' = 3t^2y^2, \ y(0) = y_0$$

auf einem größtmöglichen Existenzintervall (a, b) (in Abhängigkeit von y_0), wobei $a < 0 < b$.

(b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem aus reellwertigen Funktionen der Differentialgleichung

$$u''' + 4u' = 0.$$

(4+2 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:

(a) Begründen Sie, dass der offene dritte Quadrant in der komplexen Ebene, d.h.

$$Q_3 = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \colon x < 0, y < 0\}$$

zu keiner der Mengen

$$E_1 = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \colon xy > 0\}, \quad E_2 = \{z \in \mathbb{C} \colon 1 < |z| < 3\}, \quad E_3 = \mathbb{C}$$

konform äquivalent ist (d. h. es existiert keine biholomorphe Abbildung $Q_3 \to E_j$ für $j = 1, 2, 3$).

(b) Zeigen Sie, dass es keine zwei holomorphen Funktionen $g, h \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gibt, derart dass $g(\mathbb{C}) \setminus h(\mathbb{C}) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\}$.

(3+3 Punkte)

Aufgabe 4:

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a(\cos(x) - 1) \end{pmatrix},$$

wobei $a \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass es für alle $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ein $T > 0$ gibt, so dass die Differentialgleichung eine eindeutige Lösung auf dem Zeitintervall $(0, T)$ hat.

(b) Untersuchen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$, ob die Ruhelage $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ stabil, asymptotisch stabil oder instabil ist.

(3+3 Punkte)

Aufgabe 5:

(a) Formulieren Sie den Satz von Bolzano-Weierstraß.

Im Folgenden seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ und $f_n, g_n \colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, stetige Funktionen mit $g_1 \geq g_2 \geq \ldots$ und $f_1 \leq f_2 \leq \ldots$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen (b) und (c).

(b) Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $[a, b]$ mit $g_n(x_n) \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann existiert ein $x_0 \in [a, b]$ mit $g_n(x_0) \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) Konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, so ist diese Konvergenz sogar gleichmäßig.
Hinweis: Widerspruchsbeweis mit Hilfe von Teil (b).

(1+2+3 Punkte)