Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge sprachlich angemessen, nachvollziehbar und logisch exakt zu begründen. Für jede der 5 Aufgaben werden maximal 6 Punkte vergeben. Die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

Aufgabe 1:

a) Gegeben seien eine Zahlenfolge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{C}$. Geben Sie eine Definition dafür an, dass $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert, ohne den Konvergenzbegriff in $\mathbb{R}$ zu verwenden.

b) Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und $a_k = b_k + ic_k$ mit $b_k, c_k \in \mathbb{R}$ für $k \in \mathbb{N}$. Geben Sie an, welche Beziehung zwischen der Konvergenz der Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und der Konvergenz der beiden Folgen $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}, (c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ besteht. Beweisen Sie diese Beziehung unter Verwendung der Definition aus Teilaufgabe a).

c) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$\text{(i)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k + i\,k^2}{2k^3 + \cos(k)} \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-i)^k \frac{\cos(k) + \sin(2k)}{(4 - \cos(2k))^k}$$

(1 + 2 + 3 Punkte)

Aufgabe 2:

Es sei
$$f :]0,\infty[^2 \to \mathbb{R}, \quad (t,x) \mapsto \frac{x\ln(x)}{t}$$

a) Zeigen Sie, dass für jedes $(\tau,\xi) \in]0,\infty[^2$ das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x(\tau) = \xi$$

eine eindeutige maximale Lösung $\lambda_{(\tau,\xi)} : I_{(\tau,\xi)} \to \mathbb{R}$ besitzt.

b) Bestimmen Sie für jedes $\xi \in]0,\infty[$ die maximale Lösung $\lambda_{(1,\xi)}$ von $\dot{x} = f(t,x), x(1) = \xi$.

c) Zeigen Sie, dass die Lösung $\lambda_{(1,e)}$ eine positive untere Schranke besitzt.

(1 + 4 + 1 Punkte)

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie alle holomorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft

a) $f(0) = 1$ und $\operatorname{Re} f(z) \geq 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$ bzw.

b) $g'(z) = g(z)^2$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(2 + 4 Punkte)

Aufgabe 4:

Wir betrachten das zweidimensionale Differentialgleichungssystem

$$\dot{x} = -y\sin(x) - x$$
$$\dot{y} = x\sin(x)$$

a) Zeigen Sie, dass das zugehörige Anfangswertproblem mit

$$x(0) = 1, \; y(0) = 0$$

eine eindeutige, auf ganz $\mathbb{R}$ existierende Lösung besitzt.
Hinweis: Die rechte Seite der Differentialgleichung lässt sich gut abschätzen.

b) Sei $z = (x, y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die Lösung des Anfangswertproblems aus Teilaufgabe a). Zeigen Sie, dass $\|z(1)\|_2 \leq 1$. Hierbei bezeichnet $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^2$.

c) Sei $z = (x, y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die Lösung des Anfangswertproblems aus Teilaufgabe a). Zeigen Sie, dass sogar $\|z(1)\|_2 < 1$.

(2 + 2 + 2 Punkte)

Aufgabe 5:

Betrachten Sie das folgende Integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)(5 + 4\cos x)}$$

a) Begründen Sie, dass dieses Integral existiert und endlich ist.

b) Begründen Sie, dass auf $H := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > -\ln 2\}$ durch $h(z) := 1/(2 + e^{iz})$ eine holomorphe Funktion $h : H \to \mathbb{C}$ definiert wird.

c) Zeigen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ die Identität

$$\operatorname{Re}\left(\frac{4}{2 + e^{ix}}\right) = 1 + \frac{3}{5 + 4\cos x}.$$

d) Zeigen Sie mittels komplexer Integration, dass das Integral den Wert $\frac{\pi}{3} \cdot \frac{2e - 1}{2e + 1}$ hat.

(1 + 1 + 1 + 3 Punkte)