

Thema Nr. 3
 (Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
 Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1

(12 Punkte)

- (a) Es sei \mathbb{F}_3 der endliche Körper mit drei Elementen. Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente des Kerns U der linearen Abbildung $\varphi : \mathbb{F}_3^3 \rightarrow \mathbb{F}_3^2$, $\varphi(v) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} v$.
- (b) Bestimmen Sie eine Zerlegung des Polynoms $f = 2X^3 + 4X^2 - 2X \in \mathbb{Z}[X]$ in über \mathbb{Z} irreduzible Faktoren.
- (c) Bestimmen Sie ein $f \in \mathbb{R}[X]$ mit $(f) = (X^2 - 1, X^3 - 1)$ und begründen Sie, warum Ihre Wahl diese Gleichheit erfüllt.
- (d) Zeigen Sie, dass das Element $2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$ irreduzibel ist.

Aufgabe 2

(12 Punkte)

- (a) Ermitteln Sie die Anzahl der Lösungen der folgenden Gleichungen in $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

$$x^5 = 0, \quad x^5 = 1, \quad x^5 = 2, \quad x^5 = 3$$

- (b) Ermitteln Sie die Anzahl der Lösungen der folgenden Gleichungen in $\mathbb{Z}/2024\mathbb{Z}$.
 $(2024 = 8 \cdot 11 \cdot 23)$

$$x^5 = 0, \quad x^5 = 1, \quad x^5 = 2, \quad x^5 = 3$$

- (c) Bestimmen Sie, wie viele fünfte Potenzen es in $\mathbb{Z}/2024\mathbb{Z}$ gibt.

Aufgabe 3

(12 Punkte)

Für eine Primzahl p sei \mathbb{F}_p der endliche Körper mit $|\mathbb{F}_p| = p$; weiter sei $R := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{F}_p \right\}$.

- (a) Zeigen Sie, dass R ein Teilring des Ringes der 2×2 -Matrizen über \mathbb{F}_p ist.
- (b) Zeigen Sie, dass die Einheitengruppe R^\times im Fall $p \neq 2$ nicht einfach ist.
- (c) Nun sei $p = 257$. Entscheiden Sie begründet, ob die Einheitengruppe R^\times in diesem Fall auflösbar ist.

Aufgabe 4

(12 Punkte)

- (a) Seien K ein Körper und $f \in K[X]$ ein irreduzibles separables Polynom über K . Begründen Sie, warum die Ordnung der Galoisgruppe von f über K durch den Grad von f teilbar ist.
- (b) Geben Sie ein Beispiel an, wieso die Aussage in (a) im Allgemeinen falsch wird, wenn f nicht mehr als irreduzibel vorausgesetzt wird.
- (c) Begründen Sie, warum es zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 1$ eine Galoiserweiterung E/F von Körpern E, F gibt, deren Galoisgruppe die Ordnung n hat.
- (d) Zeigen Sie, dass die Aussage in (c) im Allgemeinen falsch wird, wenn der Körper F fest vorgegeben wird.

Aufgabe 5

(12 Punkte)

- (a) Geben Sie eine explizite Darstellung der primitiven fünften Einheitswurzeln mithilfe von Quadratwurzeln an.
(Tipp: Wenn $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 = 0$, welche Polynomgleichung erfüllt dann $Y := X + X^{-1}$?)
- (b) Folgern Sie aus Ihrer Lösung der Teilaufgabe (a) eine Konstruktionsvorschrift eines regelmäßigen Fünfecks mit Zirkel und Lineal.
- (c) Geben Sie eine Konstruktionsvorschrift eines regelmäßigen Zwanzigecks mit Zirkel und Lineal an.