

Thema Nr. 3  
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!  
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

**Aufgabe 1**

(12 Punkte)

- (a) Es sei  $\mathbb{F}_3$  der endliche Körper mit drei Elementen. Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente des Kerns  $U$  der linearen Abbildung  $\varphi : \mathbb{F}_3^3 \rightarrow \mathbb{F}_3^2$ ,  $\varphi(v) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} v$ .
- (b) Bestimmen Sie eine Zerlegung des Polynoms  $f = 2X^3 + 4X^2 - 2X \in \mathbb{Z}[X]$  in über  $\mathbb{Z}$  irreduzible Faktoren.
- (c) Bestimmen Sie ein  $f \in \mathbb{R}[X]$  mit  $(f) = (X^2 - 1, X^3 - 1)$  und begründen Sie, warum Ihre Wahl diese Gleichheit erfüllt.
- (d) Zeigen Sie, dass das Element  $2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$  irreduzibel ist.

**Aufgabe 2**

(12 Punkte)

- (a) Ermitteln Sie die Anzahl der Lösungen der folgenden Gleichungen in  $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ .

$$x^5 = 0, \quad x^5 = 1, \quad x^5 = 2, \quad x^5 = 3$$

- (b) Ermitteln Sie die Anzahl der Lösungen der folgenden Gleichungen in  $\mathbb{Z}/2024\mathbb{Z}$ .  
( $2024 = 8 \cdot 11 \cdot 23$ )

$$x^5 = 0, \quad x^5 = 1, \quad x^5 = 2, \quad x^5 = 3$$

- (c) Bestimmen Sie, wie viele fünfte Potenzen es in  $\mathbb{Z}/2024\mathbb{Z}$  gibt.

**Aufgabe 3**

(12 Punkte)

Für eine Primzahl  $p$  sei  $\mathbb{F}_p$  der endliche Körper mit  $|\mathbb{F}_p| = p$ ; weiter sei  $R := \left\{ \left( \begin{array}{cc} a & b \\ 0 & a \end{array} \right) \mid a, b \in \mathbb{F}_p \right\}$ .

- (a) Zeigen Sie, dass  $R$  ein Teilring des Ringes der  $2 \times 2$ -Matrizen über  $\mathbb{F}_p$  ist.
- (b) Zeigen Sie, dass die Einheitengruppe  $R^\times$  im Fall  $p \neq 2$  nicht einfach ist.
- (c) Nun sei  $p = 257$ . Entscheiden Sie begründet, ob die Einheitengruppe  $R^\times$  in diesem Fall auflösbar ist.

**Aufgabe 4**

(12 Punkte)

- (a) Seien  $K$  ein Körper und  $f \in K[X]$  ein irreduzibles separables Polynom über  $K$ . Begründen Sie, warum die Ordnung der Galoisgruppe von  $f$  über  $K$  durch den Grad von  $f$  teilbar ist.
- (b) Geben Sie ein Beispiel an, wieso die Aussage in (a) im Allgemeinen falsch wird, wenn  $f$  nicht mehr als irreduzibel vorausgesetzt wird.
- (c) Begründen Sie, warum es zu jeder natürlichen Zahl  $n \geq 1$  eine Galoiserweiterung  $E/F$  von Körpern  $E, F$  gibt, deren Galoisgruppe die Ordnung  $n$  hat.
- (d) Zeigen Sie, dass die Aussage in (c) im Allgemeinen falsch wird, wenn der Körper  $F$  fest vorgegeben wird.

**Aufgabe 5**

(12 Punkte)

- (a) Geben Sie eine explizite Darstellung der primitiven fünften Einheitswurzeln mithilfe von Quadratwurzeln an.  
(Tipp: Wenn  $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 = 0$ , welche Polynomgleichung erfüllt dann  $Y := X + X^{-1}$ ?)
- (b) Folgern Sie aus Ihrer Lösung der Teilaufgabe (a) eine Konstruktionsvorschrift eines regelmäßigen Fünfecks mit Zirkel und Lineal.
- (c) Geben Sie eine Konstruktionsvorschrift eines regelmäßigen Zwanzigecks mit Zirkel und Lineal an.