Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge sprachlich angemessen, nachvollziehbar und logisch exakt zu begründen. Für jede der 5 Aufgaben werden maximal 6 Punkte vergeben. Die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

Aufgabe 1:

a) Sei $M \subset \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ eine nicht-leere Teilmenge der Menge der positiven reellen Zahlen. Zeigen Sie, dass die Menge
$$A := \left\{ \frac{1}{x} \mid x \in M \right\}$$
genau dann nach oben beschränkt ist, wenn $\inf(M) > 0$ gilt.

b) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Es gelte $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:
   (i) Es gilt: $f'(0) = 1$.
   (ii) Es existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zahlen $x_n > 0$ mit $f'(x_n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.
   (iii) Es gilt: $f''(0) = 0$.

(2 + (1 + 2 + 1) Punkte)

Aufgabe 2:

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

a) Es gibt eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derart, dass $t \mapsto \sin(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung $x' = f(x)$ ist.

b) Ist $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lösung des Anfangswertproblems
$$x' = 2t - t^2 + x, \quad x(0) = 1,$$
so gilt die Ungleichung $x(t) > t^2$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
Hinweis: Es ist nicht nötig, die Lösung explizit anzugeben.

c) Die Differentialgleichung $x''' - x'' + x' - x = 0$ besitzt eine nicht-konstante Lösung, die die Bedingungen $x(0) = x(\pi) = x'(\pi) = 0$ erfüllt.

(1 + 2 + 3 Punkte)

Aufgabe 3:

a) Formulieren Sie den Residuensatz.

b) Bestimmen Sie für die durch

$$f(z) := \frac{z+2i}{z^2+4} + \left(z-\frac{1}{2}\right)^2 \exp\left(\frac{1}{z-\frac{1}{2}}\right)$$

definierte Funktion alle Singularitäten sowie deren Typ und das Residuum in jeder Singularität.

c) Nutzen Sie Teilaufgaben a) und b), um das Integral

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$$

zu berechnen, wobei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ durch

$$\gamma(t) := \begin{cases} -1 + e^{2it} & \text{falls} \quad t \in [0, \pi], \\ 1 - e^{-2(t-\pi)i} & \text{falls} \quad t \in (\pi, 2\pi] \end{cases}$$

gegeben ist.

(1 + 2 + 3 Punkte)

Aufgabe 4:

a) Begründen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$x' = x^2, \qquad x(0) = 1$$

eine eindeutige maximale Lösung besitzt, und bestimmen Sie diese mitsamt ihrem maximalen Existenzintervall.

b) Begründen Sie, dass die Differentialgleichung $x' = x^2(\sin x)^2$ für jeden Anfangswert $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$ eine eindeutige, auf $\mathbb{R}$ definierte Lösung besitzt.

c) Wir nennen eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *vollständig*, wenn sie lokal Lipschitz-stetig ist und wenn jede maximale Lösung der Differentialgleichung $x' = f(x)$, zu beliebiger Anfangsbedingung, auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist. Entscheiden Sie mit Begründung, ob die Summe zweier vollständiger Funktionen wieder vollständig ist.

Hinweis: Teilaufgaben a) und b) könnten sich als nützlich erweisen.

(2 + 2 + 2 Punkte)

Aufgabe 5:

Es sei $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ und

$$\varphi : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$$
$$z \mapsto \begin{cases} \dfrac{z-1}{z+1} & \text{für } z \in \mathbb{C}\backslash\{-1\}, \\ \infty & \text{für } z = -1, \\ 1 & \text{für } z = \infty. \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie mit Begründung $\varphi(\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\})$ und $\varphi(\mathbb{R})$.

b) Geben Sie für

$$U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Im}(z) > 0\}$$

und

$$V := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < 0, \operatorname{Im}(z) > 0\}$$

eine biholomorphe Abbildung $f : U \to V$ an, und zeigen Sie, dass diese biholomorph ist.

(3 + 3 Punkte)