Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

(a) Bestimmen Sie eine Zerlegung des Elements $z = 29 \in \mathbb{Z}[i]$ in Primelemente.

(b) Es sei $p > 3$ eine Primzahl. Zeigen Sie, dass es in der multiplikativen Gruppe $\mathbb{F}_{p^2}^\times$ ein Element a der Ordnung 12 gibt.

(c) Entscheiden Sie, ob $\overline{437} \in \mathbb{Z}/911\mathbb{Z}$ invertierbar ist. Bestimmen Sie gegebenenfalls das Inverse.

(d) Entscheiden Sie begründet, ob $\mathbb{R}$ eine algebraische Erweiterung von Grad 4 hat.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Es sei $N = a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1a_0$ mit $a_i \in \{0,\ldots,9\}, a_{n-1} \neq 0$ die dezimale Zifferndarstellung einer natürlichen Zahl N.

(a) Die *Wechselsumme* von N ist durch

$$W(N) = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i a_i$$

gegeben. (Beispiel: $W(123456) = 6 - 5 + 4 - 3 + 2 - 1$)

Zeigen Sie: Es ist N genau dann durch 11 teilbar, wenn $W(N)$ durch 11 teilbar ist.

(b) Wir nennen N *palindromisch*, wenn die Ziffernanzahl n gerade ist und

$$a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1a_0 = N = a_0a_1\ldots a_{n-2}a_{n-1}$$

gilt. (Beispiel: 493394 ist palindromisch.)

Bestimmen Sie alle palindromischen Primzahlen.

(c) Sei die Folge (U_n) mit $U_1 = 1, U_2 = 11, U_3 = 111, U_4 = 1111, \ldots$ gegeben.

Zeigen Sie:

(i) Im Fall $k \mid n$ gilt $U_k \mid U_n$.

(ii) Ist $n = k \cdot \ell$ mit $k, \ell \in \{2,3,4,\ldots\}$, so ist U_n keine Primzahl.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

(a) Entscheiden und begründen Sie, ob es eine Gruppe gibt, die außer dem neutralen Element vier Elemente der Ordnung 5, sechs Elemente der Ordnung 2 und keine weiteren Elemente enthält.

(b) Entscheiden und begründen Sie, ob es eine abelsche Gruppe gibt, die nur Elemente mit den Ordnungen 1, 2 und 4 enthält, wobei die Anzahl der Elemente durch

Ordnung	1	2	4
Anzahl	1	3	12

gegeben ist. Entscheiden Sie begründet, ob die abelsche Gruppe durch diese Angabe bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist.

(c) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Ist G eine endliche Gruppe und d ein Teiler der Gruppenordnung $\#G$, so hat G eine Untergruppe U mit $\#U = d$.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

(a) Entscheiden Sie begründet, ob ein Ring R existiert, der unendlich viele Einheiten $u \in R^\times$ endlicher multiplikativer Ordnung hat. (D. h. $\mathrm{ord}_{R^\times}(u) < \infty$.)

(b) Entscheiden Sie begründet, ob ein Ring R existiert, der unendlich viele Einheiten $u \in R^\times$ endlicher additiver Ordnung hat. (D. h. $\mathrm{ord}_{(R,+)}(u) < \infty$.)

(c) Entscheiden Sie begründet, ob ein Ring R existiert, der nur endlich viele Einheiten hat und in dem die multiplikative Ordnung einer Einheit $u \in R^\times$ unendlich ist.
(D. h. $\mathrm{ord}_{R^\times}(u) = \infty$.)

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Es seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Q}$ und das Polynom $f \in \mathbb{Q}[X]$ von Grad $2n$ durch

$$f := X^{2n} + a_1 X^{2n-1} + \cdots + a_{n-1}X^{n+1} + a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + 1$$

gegeben. Sei K der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie:

(a) Ist r eine Nullstelle von f, so ist auch $\frac{1}{r}$ eine Nullstelle von f.

(b) Es ist $\#\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \leq 2^n \cdot n!$.