Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge sprachlich angemessen, nachvollziehbar und logisch exakt zu begründen. Für jede der 5 Aufgaben werden maximal 6 Punkte vergeben. Die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

Aufgabe 1:

a) Zeigen Sie, dass jede stetige Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{\|(x,y)\|_2 \to \infty} f(x,y) = \infty$$

ein globales Minimum besitzt. Hierbei bezeichnet $\|\cdot\|_2$ mit $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^2$.

b) Begründen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \tfrac{1}{4}(x^2+y^2-2)^2 - \tfrac{1}{3}y^3$$

ein globales Minimum besitzt, und bestimmen Sie dieses sowie alle globalen Minimalstellen von f.

(2 + 4 Punkte)

Aufgabe 2:

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x' &= -x(e^x-1)^2 + y, \\ y' &= -2x - y^3. \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass $(0,0)$ die einzige Ruhelage des Systems ist.

b) Begründen Sie, dass ein Ansatz über Linearisierung nicht zielführend ist, wenn es darum geht, das Stabilitätsverhalten von $(0,0)$ zu bestimmen.

c) Beweisen Sie, dass $(0,0)$ asymptotisch stabil ist.
Hinweis: Eine Lyapunov-Funktion der Form $V(x,y) = \alpha x^2 + \beta y^2$ mit geeigneten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ kann hierbei hilfreich sein.

(1 + 2 + 3 Punkte)

Aufgabe 3:

Zeigen Sie, dass für jedes $\alpha \in (-1,1)$

$$\int_0^\pi \frac{1}{1-\alpha\cos(t)}\,dt = \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}$$

gilt.
Hinweis: Es kann hilfreich sein, dieses Integral in ein Integral zu überführen, bei dem über das Intervall $[0, 2\pi]$ integriert wird.

(6 Punkte)

Aufgabe 4:

a) Formulieren Sie den Satz von Rouché.

b) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| > e$. Zeigen Sie, dass die Gleichung $az^n = e^z$ genau n Lösungen (unter Berücksichtigung von Vielfachheiten) in der offenen komplexen Einheitskreisschreibe $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ hat.

c) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| < 1/e$. Zeigen Sie, dass die Gleichung $az^n = e^z$ keine Lösungen in $\mathbb{D}$ hat.

(2 + 2 + 2 Punkte)

Aufgabe 5:

a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$x_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x_a(t) = \begin{cases} 3e^{-t} + t - 1 & \text{für } t \geq 0 \\ e^{-t} + 1 - t & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + x(t) = |t| \\ x(0) = 2 \end{cases}$$

ist.

b) Bestimmen Sie eine Lösung $x_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + x(t) = t^2 \\ x(0) = 2. \end{cases}$$

c) Zeigen Sie, dass es eine reelle Zahl $c \in [0, 1]$ gibt, sodass das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + x(t) = \sqrt{ct^2 + (1-c)t^4} \\ x(0) = 2 \end{cases}$$

eine auf ganz $\mathbb{R}$ existierende Lösung $x_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat, für die $x_c(4) = 7$ ist.
Hinweis: Verwenden Sie die Teilaufgaben a) und b).

(2 + 2 + 2 Punkte)