Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Sei $n > 0$ und $M_n = (m_{ij})$ die reelle $n \times n$-Matrix mit $m_{ij} = 0$, falls $j < i - 1$ oder $j > i + 1$, $m_{ij} = 1$, falls $j = i - 1$, $m_{ij} = 3$, falls $j = i$ und $m_{ij} = 2$, falls $j = i + 1$. Also ist beispielsweise

$$M_5 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sei d_n die Determinante von M_n.

(a) Berechnen Sie d_1 und d_2.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $n \geq 3$ gilt $d_n = 3d_{n-1} - 2d_{n-2}$.

(c) Zeigen Sie, dass $d_n = 2^{n+1} - 1$ gilt.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$, für die die Gruppe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ außer der Identität keinen weiteren Gruppenautomorphismus besitzt.

Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung ≥ 2 mit der Eigenschaft, dass die Identität der einzige Gruppenautomorphismus ist.

(b) Zeigen Sie, dass G eine abelsche Gruppe ist.

(c) Zeigen Sie, dass $G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

(a) Sei R ein kommutativer Ring. Ein Element $x \in R$ heißt *nilpotent*, falls es ein $k \in \{1, 2, 3, ...\}$ gibt mit $x^k = 0$. Sei $I \subset R$ ein Primideal und $x \in R$ nilpotent. Zeigen Sie $x \in I$.

(b) Sei $I = (1 + i)$ das von $1 + i$ erzeugte Ideal im Ring $\mathbb{Z}[i]$. Zeigen Sie, dass der Ring $\mathbb{Z}[i]/I$ genau zwei Elemente hat.

(c) Seien R ein Integritätsbereich und $a, b, c \in R$. Zeigen Sie: Erzeugen a und b in R das Einsideal und ist a ein Teiler von bc, so ist a ein Teiler von c.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Sei p eine Primzahl mit der Eigenschaft, dass $p-1 = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$ Produkt der paarweise verschiedenen Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$ ist.

(a) Zeigen Sie, dass es genau 2^n verschiedene Untergruppen in $G = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ gibt.

(b) Sei $\zeta_p \in \mathbb{C}$ eine primitive p-te Einheitswurzel. Bestimmen Sie die Anzahl der Zwischenkörper in der Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}$.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Sei $\alpha = \sqrt{10 - 5\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Galoisgruppe von $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ isomorph ist.