Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Es seien G die multiplikative Gruppe $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ und $X = \mathbb{R}^3$ der dreidimensionale $\mathbb{R}$-Vektorraum mit skalarer Multiplikation

$$\mathbb{R} \times X \to X, \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda x.$$

Weiter sei die folgende Abbildung gegeben:

$$\cdot : G \times X \to X, \quad (g, x) \mapsto g \cdot x := gx$$

(das ist die skalare Multiplikation, eingeschränkt auf $G \times X$).

(a) Zeigen Sie, dass $\cdot$ eine Operation von G auf X ist.

(b) Bestimmen Sie die Menge F der Fixpunkte der Operation.

(c) Zeigen Sie, dass $R = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\} \cup \{0\}$ ein Repräsentantensystem der Bahnen der Operation ist.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Es seien $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ und V der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^{n \times n}$ der reellen $(n \times n)$-Matrizen. Für $A \in V$ sei $A^\top \in V$ die zu A transponierte Matrix. Weiter seien

$$U := \{A \in V \mid A^\top = A\} \qquad \text{und} \qquad W := \{A \in V \mid A^\top = -A\}.$$

Zeigen Sie:

(a) U und W sind Untervektorräume von V.

(b) $V = U \oplus W$.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle Gruppen der Ordnung $2023 = 7 \cdot 17^2$.

Aufgabe 4

(12 Punkte)

Es sei $\zeta \in \mathbb{C}$ eine primitive 7-te Einheitswurzel, und es seien $a := \zeta + \zeta^6$ und $b := \zeta + \zeta^2 + \zeta^4$.

(a) Geben Sie einen konkreten Isomorphismus zwischen der Einheitengruppe von $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ und der Galois-Gruppe von $\mathbb{Q}(\zeta)|\mathbb{Q}$ an.

(b) Zeigen Sie, dass die Körpererweiterungen $\mathbb{Q}(a)|\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}(b)|\mathbb{Q}$ galoissch sind, und bestimmen Sie die zugehörigen Galois-Gruppen bis auf Isomorphie.

(c) Bestimmen Sie die Minimalpolynome von a und b über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 5

(12 Punkte)

Für einen kommutativen Ring R definieren wir $S(R) = \{r_1^2 + r_2^2 \mid r_1, r_2 \in R\}$.

(a) Zeigen Sie: Sind $r, r' \in S(R)$, dann gilt auch $rr' \in S(R)$.

(b) Bekanntlich sind die normierten irreduziblen Polynome in $\mathbb{R}[X]$ genau die Polynome der Form $X - r$ oder $(X-a)^2 + b^2$ mit $r, a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}_{>0}$.
Zeigen Sie: $S(\mathbb{R}[X]) = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid \forall \xi \in \mathbb{R}\colon f(\xi) \geq 0\}$.