Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

(a) Es seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

$$7 \mid (10a + b) \iff 7 \mid (a - 2b) .$$

(b) Bestimmen Sie, für welche $r \in \mathbb{R}$ das folgende lineare Gleichungssystem (i) keine, (ii) genau eine, (iii) unendlich viele Lösungen hat.

$$\begin{aligned} rx + y + z &= 1 \\ x + ry + z &= 1 \\ x + y + rz &= 1 \end{aligned}$$

(c) Geben Sie ein externes direktes Produkt zyklischer Gruppen an, das isomorph ist zur Einheitengruppe $(\mathbb{Z}/40\mathbb{Z})^\times$.
(Hinweis: Hauptsatz über endliche abelsche Gruppen.)

(d) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren des Endomorphismus

$$\varphi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x - 2z \\ 0 \\ -2x + 4z \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Es sei G eine Gruppe der Ordnung 30. Es bezeichnen U_3 und U_5 jeweils eine 3- und eine 5-Sylow-Gruppe von G. Zeigen Sie:

(a) Mindestens eine der Gruppen U_3 und U_5 ist ein Normalteiler von G.

(b) Ist U_3 normal, so hat G/U_3 eine Untergruppe vom Index 2. Ist U_5 normal, so hat G/U_5 eine Untergruppe vom Index 2.

(c) G hat eine Untergruppe U_{15} vom Index 2.

(d) Zeigen Sie, dass alle 3-Sylow-Gruppen und alle 5-Sylow-Gruppen von G in U_{15} enthalten sind.

(e) Folgern Sie, dass G genau eine 3-Sylow-Gruppe und genau eine 5-Sylow-Gruppe hat.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Es sei $R = \{x + y\sqrt{-31} \mid x, y \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$.

(a) Begründen Sie, dass R ein Ring ist.

(b) Zeigen Sie, dass R nicht faktoriell ist.
Hinweis: Beachten Sie $32 = (1 + \sqrt{-31})\,(1 - \sqrt{-31})$.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Seien p und q zwei Primzahlen. Bestimmen Sie den Zerfällungskörper des Polynoms $X^p - q \in K[X]$ für die Grundkörper $K = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Es sei $\mathbb{F}_{625}$ der endliche Körper mit 625 Elementen mit Primkörper P. Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente $a \in \mathbb{F}_{625}$ mit $P(a) = \mathbb{F}_{625}$.