Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge sprachlich angemessen, nachvollziehbar und logisch exakt zu begründen. Für jede der 5 Aufgaben werden maximal 6 Punkte vergeben. Die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

Aufgabe 1:

a) Bestimmen Sie eine nicht fortsetzbare Lösung $\lambda : I \longrightarrow \mathbb{R}$ der exakten Differentialgleichung

$$2t + 4t^3 + 2xx' = 0 \tag{1}$$

zum Anfangswert $x(0) = 1$. Geben Sie insbesondere auch deren Definitionsintervall I an.

b) Zeigen Sie, dass für jede Lösung $\mu : J \longrightarrow \mathbb{R}$ von (1) sowohl J als auch $\mu(J)$ beschränkt sind.

(3 + 3 Punkte)

Aufgabe 2:
Es sei

$$f : \mathbb{C} \setminus \left\{i, i + \frac{1}{\pi}\right\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \cos\left(\frac{1}{z-i}\right) \cdot \frac{1}{z - i - \frac{1}{\pi}}.$$

a) Geben Sie den Typ aller isolierten Singularitäten von f und im Fall von Polstellen auch deren Ordnung und Residuum an. Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Geben Sie die maximale offene punktierte Kreisscheibe mit Mittelpunkt i an, auf der die Laurentreihenentwicklung von f um i konvergiert, und bestimmen Sie das Residuum von f in i.

c) Es sei $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto 2e^{it}$. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma f(z)\,dz$.

(2 + 3 + 1 Punkte)

Aufgabe 3:
Im Weiteren bezeichnen $(f_n)_n$, $(g_n)_n$ und $(h_n)_n$ Folgen stetiger reeller Funktionen $f_n, g_n, h_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ und 0 die Nullfunktion auf $[0, 1]$.

a) Beweisen Sie: Konvergiert $(f_n)_n$ gleichmäßig gegen 0, dann gibt es eine Schranke $A \in \mathbb{R}$ mit $|f_n(x)| \leq A$ für alle $x \in [0, 1]$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Bestimmen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Maximum der Funktion

$$g_n(x) = n^2 x e^{-nx}$$

auf $[0, 1]$.

c) Beweisen Sie: Die Folge $(g_n)_n$ mit g_n wie in Teilaufgabe b) konvergiert auf $[0, 1]$ punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen 0.

d) Beweisen oder widerlegen Sie jeweils: Konvergieren $(f_n)_n$ gleichmäßig gegen 0 und $(h_n)_n$ punktweise gegen 0, dann konvergiert die Folge $(f_n h_n)_n$ der Produktfunktionen $f_n h_n$ ...

(1) ... punktweise gegen 0.

(2) ... gleichmäßig gegen 0.

(1 + 1 + 2 + 2 Punkte)

Aufgabe 4:

Entscheiden Sie, ob es Funktionen f mit den jeweils angegebenen Eigenschaften gibt. Geben Sie im Fall der Existenz ein Beispiel an und begründen Sie kurz, warum dieses die geforderten Eigenschaften besitzt. Zeigen Sie andernfalls, dass es kein solches Beispiel geben kann.

a) Eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $f(0) = 0$ und $|f(z)| = 2$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$.

b) Eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $f(0) = \pi$ und $|f(z)| = 2$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$.

c) Eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit einer Polstelle bei $z = 0$ so, dass keine holomorphe Funktion $F : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ existiert mit $F' = f$.

d) Eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit einer wesentlichen Singularität bei $z = 0$ so, dass eine holomorphe Funktion $F : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ existiert mit $F' = f$.

e) Eine auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, deren Ableitung an der Stelle $x = 0$ nicht stetig ist.

(1 + 1 + 1 + 1 + 2 Punkte)

Aufgabe 5:

Für ein stetig differenzierbares Vektorfeld $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ betrachten wir die Differentialgleichung

$$x' = f(x).$$

Eine *Erhaltungsgröße* für f ist eine stetig differenzierbare Funktion $E : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, die entlang jeder Lösungskurve dieser Differentialgleichung konstant ist.

a) Zeigen Sie: Ist $E : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Erhaltungsgröße für f, so auch für das Vektorfeld $x \mapsto s(x)f(x)$ für jede stetig differenzierbare Funktion $s : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

b) Es sei nun A eine reelle $n \times n$-Matrix. Zeigen Sie: Ist E eine Erhaltungsgröße für das Vektorfeld $f(x) = Ax$ und B eine invertierbare reelle $n \times n$-Matrix, so ist $x \mapsto E(B^{-1}x)$ eine Erhaltungsgröße für das Vektorfeld $g(x) = BAB^{-1}x$.

c) Es sei nun A eine reelle 2×2-Matrix mit den beiden reellen Eigenwerten $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = +2$. Zeigen Sie, dass das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) = Ax$ eine nicht-konstante Erhaltungsgröße hat.

(2 + 2 + 2 Punkte)