Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

(a) Es sei (A, ·) eine abelsche Gruppe. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\phi \colon A \to A, \qquad a \mapsto a^{-1}$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

(b) Geben Sie ein Gegenbeispiel an, welches zeigt, dass die entsprechende Aussage für beliebige Gruppen im Allgemeinen falsch ist.

(c) Mit $\mathfrak{A}_4$ werde die alternierende Gruppe über vier Buchstaben bezeichnet. Bestimmen Sie diejenigen $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, für die es einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $\phi \colon \mathfrak{A}_4 \to \mathbb{Z}/(n)$ gibt.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

(a) Geben Sie die Definition von *Nullteilerfreiheit* eines kommutativen Rings an.

(b) Bestimmen Sie alle Nullteiler und Einheiten sowie die Inklusionen aller Ideale des kommutativen Rings $\mathbb{Z}/(27)$.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass jeder irreduzible Faktor von $f := X^4 - 25 \in \mathbb{Q}[X]$ separabel über $\mathbb{Q}$ ist.

(b) Bestimmen Sie ein primitives Element eines Zerfällungskörpers L von f über $\mathbb{Q}$ und die Dimension von L über $\mathbb{Q}$.

(c) Berechnen Sie die Automorphismengruppe von L über $\mathbb{Q}$.

(d) Bestimmen Sie alle Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq L$ und ihre Inklusionen.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Charakteristik eines endlichen Körpers eine Primzahl ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Anzahl der Elemente eines endlich-dimensionalen Vektorraums V über einem endlichen Körper K eine Potenz der Charakteristik von K ist.

(c) Sei K ein endlicher Körper mit q Elementen; die Charakteristik von K sei ungleich 2. Berechnen Sie die Mächtigkeit der Bahn des Elementes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(K)$$

unter der Operation von $\mathrm{GL}_2(K)$ durch Konjugation.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Seien K ein Körper und $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen K-Vektorräumen V und W. Seien

$$V^* := \mathrm{Hom}_K(V, K) \qquad \text{und} \qquad W^* := \mathrm{Hom}_K(W, K)$$

die Dualräume, sowie $f^*\colon W^* \to V^*$, $\varphi \mapsto \varphi \circ f$, die duale Abbildung.

(a) Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine K-Basis von V. Zeigen Sie, dass f genau dann injektiv ist, wenn $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ linear unabhängig sind.

(b) Zeigen Sie: Ist f injektiv, dann ist f^* surjektiv.

(c) Zeigen Sie: Ist f^* surjektiv, dann ist f injektiv.