Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge sprachlich angemessen, nachvollziehbar und logisch exakt zu begründen. Für jede der 5 Aufgaben werden maximal 6 Punkte vergeben. Die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

Aufgabe 1:

a) Bestimmen Sie Art und Lage aller lokalen Extrema von

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = xe^{-x^2-y^2}.$$

b) Zeigen Sie, dass alle stationären Lösungen des ebenen autonomen Systems

$$x' = 2xy$$

$$y' = 1 - 2x^2$$

stabil sind.

Hinweis: Aufgabenteil a) kann hier hilfreich sein.

(3 + 3 Punkte)

Aufgabe 2:

Entscheiden Sie jeweils durch einen Beweis oder ein Gegenbeispiel, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

a) Es gibt eine holomorphe Funktion $f : \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| < 1\} \to \mathbb{C}$ mit $f^{(k)}(1) = (k + 1)!$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

b) Es gibt eine biholomorphe Funktion $g : \mathbb{C} \to \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\,(z) > 0\}$.

c) Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) = xe^{-nx^2}$, konvergiert gleichmäßig gegen die Nullfunktion.

(2 + 2 + 2 Punkte)

Aufgabe 3:

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} |y| \\ x \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\binom{x'}{y'} = f\binom{x}{y}$, $\binom{x(0)}{y(0)} = \xi$ für jedes $\xi = \binom{\xi_1}{\xi_2} \in \mathbb{R}^2$ eine eindeutige, auf $\mathbb{R}$ definierte maximale Lösung $\lambda_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ besitzt.

b) Zeigen Sie, dass $\binom{0}{0}$ eine instabile Ruhelage von $\binom{x'}{y'} = f\binom{x}{y}$ ist.

Hinweis: Betrachten Sie dazu Lösungen mit Anfangswerten $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ für $\xi_2 > 0$.

(3 + 3 Punkte)

Aufgabe 4:

Wir betrachten die holomorphe Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0, 1, -1\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{1 - z^2} \exp\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

a) Bestimmen Sie die Art jeder isolierten Singularität von f und berechnen Sie die Residuen.

b) Berechnen Sie für

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0, -1, 1\}, \quad t \mapsto -1 + \frac{1}{2} e^{-it}$$

das Kurvenintegral $\int_\gamma f(z)dz$.

c) Zeigen Sie, dass sich f auf $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z + 1| < 1\}$ nicht lokal gleichmäßig durch Polynome approximieren lässt.

(4 + 1 + 1 Punkte)

Aufgabe 5:

a) Bestimmen Sie die maximale Lösung von $x' = -2tx^2$, $x(0) = 1$.

b) Zeigen Sie, dass es genau eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{i, -i\} \to \mathbb{C}$ mit $f(0) = 1$ und $f'(z) = -2z(f(z))^2$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ gibt.

(3 + 3 Punkte)