Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge durch einen zusammenhängenden Text nachvollziehbar und logisch exakt zu begründen. Für jede der 5 Aufgaben werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

Aufgabe 1:

Entscheiden Sie jeweils, ob die Aussage wahr oder falsch ist und begründen Sie Ihre Entscheidung:

(a) Der Konvergenzradius der Potenzreihenentwicklung von

$$f : \mathbb{C}\backslash\{0, i, -i\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{\sin(z)}{z(z^2+1)}$$

um 1 ist 1.

(b) Es gibt eine holomorphe Funktion $g : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ mit einer wesentlichen Singularität bei 0 und Residuum $\operatorname{Res}(g, 0) = 0$.

(c) Die Funktionenfolge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $h_n(x) = xe^{-\frac{x^2}{n}}$ für $x \in \mathbb{R}$ konvergiert gleichmäßig gegen die Nullfunktion.

(2+2+2 Punkte)

Aufgabe 2:

Es sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 3$.

(a) Zeigen Sie, dass das Integral

$$\int_0^\infty \frac{t}{1+t^k}\,dt$$

existiert.

(b) Weisen Sie nach, dass

$$\int_0^\infty \frac{t}{1+t^k}\,dt = \frac{\pi}{k\sin\left(\frac{2\pi}{k}\right)}.$$

Hinweis: Ein Kurvenintegral längs einer geschlossenen Kurve, die von 0 zu R und $R \cdot e^{\frac{2\pi i}{k}}$ und dann zurück zu 0 geht, könnte helfen.

(1+5 Punkte)

Aufgabe 3:

Es sei $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $H := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$ und $G := H \setminus \{iy : y \in (0,1]\}$.

(a) Geben Sie eine biholomorphe Abbildung $f : H \to \mathbb{C}\setminus[0,\infty)$ an.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $g : H \to \mathbb{E}$, $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ biholomorph ist.

(c) Konstruieren Sie eine biholomorphe Abbildung $h : G \to \mathbb{E}$.

(1+3+2 Punkte)

Aufgabe 4:

Es sei die Funktion

$$f : (-1,1) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-|x|}}$$

gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass f lokal lipschitzstetig ist.

(b) Berechnen Sie eine Lösung $\mu : J \to \mathbb{R}$ von

$$x' = f(x), \quad x(0) = 0,$$

deren Graph $\Gamma(\mu) = \{(t, \mu(t)) : t \in J\}$ in $[0,\infty)^2$ enthalten ist. Hierbei ist J ein geeignet zu wählendes reelles Intervall.

(c) Zeigen Sie, dass $x' = f(x)$, $x(0) = 0$ eine maximale Lösung besitzt und bestimmen Sie diese inklusive des maximalen Existenzintervalls.

Hinweis: Verwenden Sie das Ergebnis aus (b).

(1+3+2 Punkte)

Aufgabe 5:

Untersuchen Sie für alle Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ die Ruhelage $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + ax^3 + by + a^2y^2, \\ \dot{y} &= -bx + ay - a^2y^2 \end{aligned}$$

auf ihre Stabilitätseigenschaften.

(6 Punkte)