Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge sprachlich angemessen, nachvollziehbar und logisch exakt zu begründen. Für jede der 5 Aufgaben werden maximal 6 Punkte vergeben. Die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

Aufgabe 1:

Gegeben sei das ebene Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x' &= y(1-x^2), \\ y' &= -x(1-y^2). \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie ein erstes Integral für dieses System, d.h., eine nicht-konstante Funktion $H:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, die entlang jeder Lösungskurve $t \mapsto (x(t), y(t))$ konstant ist.

b) Entscheiden Sie, ob die Ruhelage in $(0,0)$ stabil, asymptotisch stabil beziehungsweise instabil ist. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

c) Neben dem Ursprung besitzt das System vier weitere Ruhelagen. Bestimmen Sie eine davon und diskutieren Sie deren Stabilitätseigenschaften.

(2 + 2 + 2 Punkte)

Aufgabe 2:

Es sei $A := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 5\}$. Wir betrachten auf A die Abbildung

$$F\colon A \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x_1, x_2) \mapsto \left(7 + 3 \cdot \frac{3+x_2^2}{2+x_2^2},\ e^{-x_1^2}\right).$$

Weiter bezeichne $\|\,.\,\|$ die euklidische Norm auf dem $\mathbb{R}^2$.

a) Zeigen Sie, dass für alle Punkte $x \in A$ gilt: $\|F(x)\| \geq 10$.

b) Bestimmen Sie alle Punkte $x \in A$, so dass $\|F(x)\|^2 \geq \|F(y)\|^2$ für alle $y \in A$. Begründen Sie, warum es keine weiteren Punkte als die von Ihnen gefundenen geben kann.

c) Die Abbildung $F\colon A \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ist ein Vektorfeld und beschreibt damit eine Differentialgleichung $y' = F(y)$ erster Ordnung auf A. Es sei $\mu\colon [0,2] \longrightarrow A$ eine Lösung dieser Differentialgleichung mit Anfangspunkt $\mu(0) = (7,3)$. Zeigen Sie, dass die (euklidische) Länge der Kurve μ mindestens 20 beträgt.

(2 + 3 + 1 Punkte)

Aufgabe 3:

a) Es sei

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(t,x) = t\log(1+x^2) + t^2\cos(x).$$

Zeigen Sie: Jede maximale Lösung von $x' = f(t,x)$ hat $\mathbb{R}$ als Definitionsbereich.

b) Bestimmen Sie alle $r \geq -2023$, so dass folgende Aussage gilt: Jede beschränkte holomorphe Funktion $f\colon \{z \in \mathbb{C} : |z - i| > r\} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist konstant. Begründen Sie Ihre Antwort.

(2 + 4 Punkte)

Aufgabe 4:

a) Bestimmen Sie eine Möbiustransformation m mit

$$m(1) = \infty, \qquad m(\infty) = 0 \qquad \text{und} \qquad m(0) = 1 - i.$$

Zeigen Sie, dass für eine solche Funktion die Relation $m(i) = 1$ gelten muss.

b) Es bezeichne Δ die offene Dreiecksfläche in $\mathbb{C}$ mit den Eckpunkten 0, 1 und i. Bestimmen Sie die Bildmenge $m(\Delta)$, wobei m wie in Teilaufgabe a) gewählt sei. Verdeutlichen Sie Ihr Ergebnis durch eine Skizze von $m(\Delta)$.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst die Bilder der drei Geraden, die aus den Verlängerungen der Dreiecksseiten von Δ entstehen, unter der Abbildung m. Worauf wird die Dreiecksseite abgebildet, die 0 und i verbindet? Für all diese Überlegungen genügt es, die Werte von m an den Stellen 0, 1, i und ∞ zu kennen. Diese sind aus Teilaufgabe a) bekannt.

(2 + 4 Punkte)

Aufgabe 5:

a) Es sei $c \in \mathbb{R}$ und $f\colon \mathbb{R} \setminus \{c\} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Geben Sie die Definition des linksseitigen Grenzwerts $\lim_{x \nearrow c} f(x) = -\infty$ an.

b) Wir betrachten die Funktion

$$F\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \int_x^\pi \exp(t^2)\, dt.$$

Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \frac{F(2x)}{\cos(x)}.$$

c) Wir betrachten die Exponentialfunktion

$$\exp : U \longrightarrow \mathbb{C},\ z \mapsto \exp(z) \qquad \text{auf} \qquad U := \{x + iy \mid x \in \mathbb{R}, y \in (0, 2\pi)\}.$$

Diese Funktion ist injektiv und das Bild ist $V := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$ (Sie müssen dies nicht beweisen). Es sei $\Theta\colon V \longrightarrow U$ die Umkehrfunktion von $\exp\colon U \longrightarrow V$. Bestimmen Sie die folgenden beiden Grenzwerte:

$$\lim_{h \searrow 0} \Theta(3 \cdot \exp(ih)) \qquad \text{und} \qquad \lim_{h \nearrow 0} \Theta(3 \cdot \exp(ih)).$$

(1 + 3 + 2 Punkte)