Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge sprachlich angemessen, nachvollziehbar und logisch exakt zu begründen. Für jede der 5 Aufgaben werden maximal 6 Punkte vergeben. Die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

Aufgabe 1:

Wir betrachten die meromorphe Funktion

$$f(z) := \frac{z}{e^{2\pi i z} - 1} \qquad \text{auf} \qquad \Omega := \{z \in \mathbb{C} \colon |\operatorname{Re} z - 1| < 2\}.$$

a) Skizzieren Sie das Gebiet Ω und bestimmen Sie für jede Polstelle von f in Ω jeweils die Ordnung und das Residuum.

b) Wir betrachten den geschlossenen Integrationsweg $\gamma\colon [0, 2\pi] \longrightarrow \Omega$, $\gamma(t) = \frac{1}{2} + e^{-it}$. Skizzieren Sie den Weg γ und seinen Umlaufsinn und berechnen Sie das Kurvenintegral $\oint_\gamma f(z)\, dz$.

(3 + 3 Punkte)

Aufgabe 2:

Die Funktion $E : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$E(x, y) := (x - y)e^{-\frac{1}{4}(x^2+y^2)}\,.$$

a) Es bezeichne $|(x, y)| := \sqrt{x^2 + y^2}$ die euklidische Norm von $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Begründen Sie, dass

$$\lim_{|(x,y)| \to \infty} E(x, y) = 0$$

gilt. Zeigen Sie dann, dass die Funktion E ein globales Maximum besitzt und dass dieses nur an der Stelle $(1, -1)$ angenommen wird.

Hinweis: Es ist unnötig, die Hesse-Matrix von E zu berechnen.

b) Zeigen Sie, dass E eine Erhaltungsgröße des Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 + xy - y^2 \\ 2 + xy - x^2 \end{pmatrix}$$

ist. Untersuchen Sie die Ruhelage $(1, -1)$ der Differentialgleichung auf Stabilität und asymptotische Stabilität. Erläutern Sie, was sich aus dem Linearisierungssatz schließen lässt und was mit Hilfe der Methode von Lyapunov. Bei der Anwendung der Methode von Lyapunov können die Aussagen der Teilaufgabe a) hilfreich sein.

(3 + 3 Punkte)

Aufgabe 3:

Es sei $F\colon \mathbb{R} \longrightarrow (0,\infty)$ eine stetig differenzierbare Funktion, die periodisch mit der Periode $\omega > 0$ ist. Zeigen Sie:

a) Die maximalen Lösungen der autonomen Differentialgleichung $x' = F(x)$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

b) Jede maximale Lösung $x\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ von $x' = F(x)$ ist streng monoton steigend, nach oben und unten unbeschränkt und surjektiv.

Hinweis: Zum Nachweis der Unbeschränktheit können Sie z.B. indirekt argumentieren oder auch das Wachstum von x geeignet abschätzen.

c) Für jede maximale Lösung $x\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ von $x' = F(x)$ existiert eine Konstante $b > 0$ mit $x(t+b) - x(t) = \omega$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(2 + 2 + 2 Punkte)

Aufgabe 4:

a) Es seien $Q := \{z \in \mathbb{C} : -1 < \mathrm{Re}(z) < 1, -1 < \mathrm{Im}(z) < 1\}$, $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe und $f : \mathbb{D} \longrightarrow Q$ eine biholomorphe Abbildung mit $f(0) = 0$.

(1) Zeigen Sie: Die Abbildung $g : \mathbb{D} \longrightarrow Q$, $g(z) = if(z)$, ist biholomorph.

(2) Beweisen Sie: $f(i\,z) = if(z)$ für alle $z \in \mathbb{D}$.
Hinweis: Sie können z.B. $f^{-1} \circ g : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ betrachten.

b) Es sei $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$.

(1) Beweisen Sie mithilfe der Cauchy'schen Integralformel

$$|a_k| \leq \frac{1}{(2r)^k} \cdot \max_{|z|=2r} |f(z)| \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0 \text{ und alle } r > 0.$$

(2) Zeigen Sie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k \leq 2 \max\limits_{|z|=2r} |f(z)|$ für alle $r > 0$.

(3 + 3 Punkte)

Aufgabe 5:

a) Es seien $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f' = g$ und $g' = f$ sowie $f(0) = 1$ und $g(0) = 0$. Zeigen Sie:

$$(f(x))^2 - (g(x))^2 = 1 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \qquad \text{und} \qquad f(x) + g(x) > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

b) (1) Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ gilt

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - x_k} \right)^2 \leq n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x - x_k)^2}.$$

(2) Es sei $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$ mit den n reellen Nullstellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Zeigen Sie:

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - x_k} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

und

$$(n-1)(P'(x))^2 \geq nP(x)P''(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

(2 + (1+3) Punkte)