Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

a) Sei $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ und sei R ein Ring. Ein Element $\omega \in R$ ist eine *n-te Einheitswurzel in R*, wenn $\omega^n = 1$ gilt, und eine *primitive n-te Einheitswurzel*, wenn zusätzlich für alle $1 \leq m < n$ gilt, dass $\omega^m - 1 \in R^\times$ (also eine Einheit in R) ist.

Zeigen Sie, dass (die Restklasse von) 7 in $\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$ eine vierte Einheitswurzel, aber keine primitive vierte Einheitswurzel ist.

b) Bestimmen Sie die Ordnung der Einheitengruppe von $\mathbb{Z}/2025\mathbb{Z}$ und zeigen Sie, dass diese Gruppe nicht zyklisch ist.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Sei p eine Primzahl.

a) Sei q ein Primteiler von $2^p - 1$. Zeigen Sie: $q \equiv 1 \pmod p$.
Hinweis: Betrachten Sie die Ordnung von $2 \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$.

b) Zeigen Sie: Es gibt eine Galois-Erweiterung $\mathbb{Q} \subseteq K_p$ mit $\mathrm{Gal}(K_p|\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
Hinweis: Betrachten Sie Teilkörper von geeigneten Kreisteilungskörpern.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Sei K ein Körper mit algebraischem Abschluss $\bar{K}$, sei $f \in K[X]$ normiert und sei $L = K(\alpha)$ mit einer Nullstelle $\alpha \in \bar{K}$ von f.

a) Zeigen Sie: Ist $[L : K] = \deg(f)$, dann ist f irreduzibel in $K[X]$.

b) Sei jetzt $f \in K[X]$ irreduzibel und sei weiter $g \in K[X]$. Wir nehmen an, dass das Polynom $g(X) - \alpha \in L[X]$ irreduzibel ist.
Zeigen Sie, dass dann $f(g(X)) \in K[X]$ irreduzibel ist.
Hinweis: Sei $\beta \in \bar{K}$ mit $g(\beta) = \alpha$. Zeigen Sie $K(\beta) = L(\beta)$.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Sei G eine Gruppe der Ordnung $2025 = 3^4 \cdot 5^2$ und seien $U_5, U_5' \subseteq G$ zwei verschiedene 5-Sylow-Gruppen von G.

a) Bestimmen Sie die Anzahl der 5-Sylow-Gruppen von G.

b) Sei U die von (den Elementen von) U_5 und U_5' erzeugte Untergruppe von G.
Zeigen Sie: $U = G$.

Hinweis: Wie viele 5-Sylow-Gruppen kann eine echt zwischen U_5 und G liegende Untergruppe haben?

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Sei p eine Primzahl und sei $\mathbb{F}_p$ der endliche Körper mit p Elementen. Sei weiter

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{F}_p^\times, b \in \mathbb{F}_p \right\}.$$

Zeigen Sie:

a) Die Menge G ist eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_p)$.

b) Die Gruppe G enthält eine zyklische Untergruppe H_{p-1} der Ordnung $p-1$ und eine zyklische Untergruppe H_p der Ordnung p.

c) Die Gruppe G ist zyklisch.