

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1

(12 Punkte)

Sei p eine Primzahl, $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ der Körper mit p Elementen und $G := \text{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ gegeben.

- a) Zeigen Sie, dass für die Anzahl der Elemente in G gilt:

$$|G| = p(p-1)^2(p+1).$$

- b) Bestimmen Sie die Ordnung des Elements $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$.

- c) Zeigen Sie, dass es mehr als eine p -Sylow-Untergruppe in G gibt.

- d) Sei nun speziell $p = 3$ und

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq G.$$

Zeigen Sie, dass der Normalisator $N := \{g \in G \mid g \cdot H = H \cdot g\} \subseteq G$ von H in G aus den oberen Dreiecksmatrizen in G besteht. Folgern Sie, dass G genau vier 3-Sylow-Gruppen besitzt.

Aufgabe 2

(12 Punkte)

Für $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ betrachte man $R_b := \left\{ \frac{a}{b^k} \in \mathbb{Q} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ und } k \in \mathbb{N}_0 \right\} \subseteq \mathbb{Q}$.

- a) Zeigen Sie, dass R_b ein Teilring von \mathbb{Q} und damit ein kommutativer Ring mit Eins ist.
b) Zeigen Sie, dass für die Einheitengruppe gilt:

$$(R_b)^\times = \left\{ \frac{a}{b^k} \in R_b \mid a \in \mathbb{Z} \text{ und es existieren } c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \text{ und } \ell \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } ac = b^\ell \right\}.$$

- c) Zeigen Sie, dass R_b ein Hauptidealbereich ist und jedes Ideal $\mathfrak{a} \triangleleft R_b$ die Form $\mathfrak{a} = R_b \cdot w$ für ein $w \in \mathbb{Z}$ hat.

Hinweis: Offenbar gilt $\mathbb{Z} \subseteq R_b$. Betrachten Sie für ein Ideal $\mathfrak{a} \triangleleft R_b$ den Durchschnitt mit \mathbb{Z} .

Aufgabe 3

(12 Punkte)

Sei $A \in \text{Mat}_3(\mathbb{Q})$ eine (3×3) -Matrix, deren charakteristisches Polynom $\chi_A(X) \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel über \mathbb{Q} ist. Seien $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $\chi_A(X)$ und $\mathbb{Q}(\alpha)$ der davon erzeugte Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\alpha) \subseteq \mathbb{C}$. Betrachten Sie die Multiplikation mit α :

$$\varphi : \mathbb{Q}(\alpha) \rightarrow \mathbb{Q}(\alpha), \quad x \mapsto \alpha \cdot x.$$

- Zeigen Sie, dass φ eine \mathbb{Q} -lineare Abbildung ist.
- Bestimmen Sie die darstellende Matrix B von φ bezüglich der Basis $1, \alpha, \alpha^2$ von $\mathbb{Q}(\alpha)$ als \mathbb{Q} -Vektorraum und zeigen Sie, dass deren charakteristisches Polynom identisch mit dem von A ist, also $\chi_B(X) = \chi_A(X) \in \mathbb{Q}[X]$ gilt.
- In der Situation von b): Zeigen Sie, dass die beiden Matrizen A und B , betrachtet in $\text{Mat}_3(\mathbb{C})$, ähnlich sind.

Aufgabe 4

(12 Punkte)

Sei G eine endliche Gruppe und p eine Primzahl, die die Gruppenordnung $|G|$ teilt. Seien ferner $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ der Körper mit p Elementen und \mathbb{F}_p^\times die Einheitengruppe von \mathbb{F}_p . Wir definieren

$$M := \{ g \in G \mid \text{ord}(g) = p \}$$

als die Menge aller Gruppenelemente, deren Ordnung gleich p ist.

- Zeigen Sie, dass durch

$$\mathbb{F}_p^\times \times M \rightarrow M, \quad ([a], g) \mapsto g^a$$

eine Gruppenoperation definiert ist.

- Sei $g \in M$ ein beliebiges Element. Zeigen Sie, dass der Stabilisator

$$(\mathbb{F}_p^\times)_g := \{ [a] \in \mathbb{F}_p^\times \mid g^a = g \} \subseteq \mathbb{F}_p^\times$$

von $g \in M$ trivial ist, also $(\mathbb{F}_p^\times)_g = \{[1]\}$ gilt.

- Folgern Sie, dass $|M|$ ein Vielfaches von $p - 1$ ist.

Aufgabe 5

(12 Punkte)

Betrachten Sie das Polynom $f(X) = X^{15} - 7 \in \mathbb{Q}[X]$.

- Sei $L|\mathbb{Q}$ ein Zerfällungskörper von f . Bestimmen Sie den Körpergrad $[L : \mathbb{Q}]$.
- Zeigen Sie, dass die Galois-Gruppe $\text{Gal}(L|\mathbb{Q})$ einen Normalteiler der Ordnung 15 besitzt.
- Sei $\alpha \in L$ eine Nullstelle von f . Zeigen Sie, dass die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}(\alpha^5)$ den Körpergrad $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}(\alpha^5)] = 5$ besitzt.