Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Sei $\omega \in \mathbb{C}$ eine primitive dritte Einheitswurzel.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)$ eine Galois-Erweiterung ist.

(b) Bestimmen Sie den Grad $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega) : \mathbb{Q}]$ dieser Erweiterung.

(c) Sei G die Menge der invertierbaren 2×2-Matrizen der Form $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ mit Einträgen in $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass G eine Untergruppe der Gruppe der invertierbaren 2×2-Matrizen ist, und geben Sie einen Isomorphismus $G \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)/\mathbb{Q})$ an.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

(a) Geben Sie die Definition einer *auflösbaren Gruppe* an.

(b) Bestimmen Sie alle endlichen einfachen auflösbaren Gruppen.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

(a) Seien G_1 und G_2 endliche Gruppen und $|G_1|$ teilerfremd zu $|G_2|$. Sei weiter $H \subseteq G_1 \times G_2$ eine Untergruppe. Zeigen Sie, dass es Untergruppen $H_1 \subseteq G_1$ und $H_2 \subseteq G_2$ gibt mit $H = H_1 \times H_2$.

(b) Geben Sie zwei Gruppen G_1 und G_2 an sowie eine Untergruppe $H \subseteq G_1 \times G_2$, sodass H nicht von der Form $H_1 \times H_2$ für zwei Untergruppen $H_1 \subseteq G_1$ und $H_2 \subseteq G_2$ ist.

(c) Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung n mit folgenden Eigenschaften:

(i) Für jeden Teiler $k > 0$ von n gibt es eine Untergruppe U von G der Ordnung k.

(ii) G ist nicht abelsch.

Zeigen Sie, dass G nicht einfach ist.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Es seien $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$, $z = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}^4$ beliebig und

$$f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, \quad (u_1, u_2, u_3, u_4) \mapsto \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass f eine lineare Abbildung ist.

(b) Zeigen Sie, dass x, y, z Elemente des Kerns von f sind.

(c) Zeigen Sie, dass der Kern von f genau dann der von x, y, z aufgespannte Unterraum ist, wenn diese Vektoren linear unabhängig sind.

(d) Bestimmen Sie den Kern von f im Fall, dass x, y, z linear abhängig sind.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring mit 1.

(a) Sei $x \in R$ ein Element mit $x^m = 0$ für ein $m > 0$. Zeigen Sie, dass dann $1 + x \in R$ multiplikativ invertierbar ist.

(b) Sei $I \subseteq R$ ein Ideal. Zeigen Sie, dass dann auch

$$\sqrt{I} := \{x \in R \mid x^m \in I \text{ für ein } m > 0\}$$

ein Ideal in R ist.

(c) Zeigen Sie, dass $N(R) := \{x \in R \mid x^m = 0 \text{ für ein } m > 0\}$ ein Ideal in R ist.

(d) Geben Sie ein Beispiel für einen (nicht kommutativen) Ring R' an, in dem $N(R') \subseteq R'$ (wie in (c)) *kein* (Links-)Ideal ist.