Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

(a) Seien $n \geq 1$ eine natürliche Zahl und $p \neq 2$ eine Primzahl. Zeigen Sie:

$$p \mid (1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n) \iff p \mid n \text{ oder } p \mid (n+1).$$

(b) Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente der Einheitengruppe

$$\left(\mathbb{Z}[X]/(2, X^3 + X^2 + X)\right)^*$$

des angegebenen Quotientenringes.

(c) Bestimmen Sie mithilfe des Chinesischen Restsatzes und unter vollständiger Angabe des Lösungsweges die kleinste natürliche Zahl $n \geq 1$, die die Kongruenzen $n \equiv 1 \pmod 3$, $n \equiv 2 \pmod 5$ und $n \equiv 0 \pmod 8$ erfüllt.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Im Folgenden sei S_n die symmetrische Gruppe.

(a) Sei $\sigma \in S_n$ ein Produkt $\sigma = \zeta_1 \cdots \zeta_m$ von paarweise disjunkten Zykeln ζ_j der Länge ℓ_j. Zeigen Sie, dass die Ordnung von σ gleich dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen von $\ell_1, \ldots, \ell_m$ ist.

(b) Bestimmen Sie die maximale Ordnung eines Elements
(i) der S_6; (ii) der S_7.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

(a) Seien G eine einfache Gruppe mit $|G| > 2$, die auf der endlichen Menge X operiere, und $\rho\colon G \to \Sigma(X) \simeq S_n$ ($n := |X|$) der zugehörige Gruppenhomomorphismus in die symmetrische Gruppe von X. Zeigen Sie, dass $\rho(G)$ in der alternierenden Gruppe A_n enthalten ist.

(b) Seien G eine nicht-abelsche einfache Gruppe, $H \subseteq G$ eine Untergruppe sowie $n := (G : H) \geq 2$. Zeigen Sie, dass G isomorph zu einer Untergruppe von A_n ist, und dass $n \geq 5$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass keine endliche einfache Gruppe der Ordnung 80 existiert.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring (mit 1). Sei weiter $I \subseteq R$ ein Ideal. Wir definieren das *Radikal* von I als

$$rad(I) = \{r \in R \mid r^n \in I \text{ für ein } n \in \mathbb{Z}_{>0}\}.$$

Zeigen Sie:

(a) $rad(I)$ ist ebenfalls ein Ideal von R.

(b) Ist I ein Primideal, dann gilt $rad(I) = I$.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass der Kreisteilungskörper $\mathbb{Q}(\zeta_8)$ genau drei quadratische Teilkörper besitzt, d. h. Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_8)$ mit $[K : \mathbb{Q}] = 2$.

(b) Bestimmen Sie in Teil (a) drei Elemente $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{Q}$ so, dass die Zwischenkörper $K_i := \mathbb{Q}(\sqrt{\alpha_i})$ $(1 \leq i \leq 3)$ genau die quadratischen Teilkörper sind.

(c) Zeigen Sie, dass das Polynom $X^4 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$ irreduzibel ist.

(d) Nach Teil (c) gilt $\mathbb{F}_{16} = \mathbb{F}_2(\alpha)$ für ein $\alpha \in \overline{\mathbb{F}}_2$ mit $\alpha^4 + \alpha + 1 = 0$. Bestimmen Sie die Grade $[\mathbb{F}_2(\beta) : \mathbb{F}_2]$ in den beiden Fällen $\beta = \alpha + 1$ und $\beta = \alpha^3 + 1$.