Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge durch einen ausführlichen Text zu begründen. Für jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

Aufgabe 1 (4+2 Punkte)

a) Geben Sie eine Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die in keinem Punkt stetig ist. Zeigen Sie dabei explizit die Unstetigkeit in jedem Punkt.

b) Geben Sie eine Funktion $[0,1] \to \mathbb{R}$ an, die integrierbar ist, aber nicht stetig. Begründen Sie dabei diese Eigenschaften. (Sie können sich auf das Riemann- oder das Lebesgue-Integral beziehen.)

Aufgabe 2 (4+2 Punkte)

Gegeben sei die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto \big(x(1-y), xy\big)$.

a) Zeigen Sie, dass f den Streifen $S :=]0,\infty[\times]0,1[$ diffeomorph auf den ersten Quadranten $Q :=]0,\infty[^2$ abbildet (d.h. f bildet S bijektiv auf Q ab und $f : S \to Q$ sowie die Umkehrabbildung $f^{-1} : Q \to S$ sind stetig differenzierbar.)

b) Wir identifizieren nun $\mathbb{R}^2$ in kanonischer Weise mit $\mathbb{C}$ und fassen f als Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ auf. Bildet dann f den Streifen $S = \big\{z \in \mathbb{C} \bigm| \mathrm{Re}(z) > 0, 0 < \mathrm{Im}(z) < 1\big\}$ konform (d.h. biholomorph) auf den ersten Quadranten $Q = \big\{w \in \mathbb{C} \bigm| \mathrm{Re}(w) > 0, \mathrm{Im}(w) > 0\big\}$ ab? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3 (1+5 Punkte)

a) Formulieren Sie den Satz von Liouville über ganze Funktionen.

b) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Zeigen Sie: Ist der Imaginärteil $\mathrm{Im}(f) : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ nach unten beschränkt, so ist f konstant.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4 (2+2+2 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle Lösungen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der homogenen reellen Differentialgleichung

$$y'' + 2y' + 2y = 0.$$

b) Bestimmen Sie alle Lösungen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der inhomogenen reellen Differentialgleichung

$$y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = 15e^x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

c) Zeigen Sie, dass es genau eine holomorphe Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gibt mit

$$f''(z) + 2f'(z) + 2f(z) = 15e^z$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ sowie $f(0) = 3, f'(0) = 2$ und bestimmen Sie diese.

Aufgabe 5 (3+3 Punkte)

a) Seien $f, g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen und

$$p :]0,\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}, (r,\varphi) \mapsto f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot\cos\varphi + g(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot\sin\varphi,$$

$$q :]0,\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}, (r,\varphi) \mapsto \frac{1}{r}\Big(g(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot\cos\varphi - f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot\sin\varphi\Big).$$

Zeigen Sie: Ist $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) : I \to]0,\infty[\times\mathbb{R}$ eine Lösung des Systems

$$r' = p(r,\varphi), \quad \varphi' = q(r,\varphi),$$

so ist

$$\beta : I \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, (\beta_1(t), \beta_2(t)) = \big(\alpha_1(t)\cdot\cos\alpha_2(t), \alpha_1(t)\cdot\sin\alpha_2(t)\big),$$

eine Lösung des Systems

$$x' = f(x,y), \quad y' = g(x,y).$$

b) Bestimmen Sie mit Hilfe von a) die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$x' = y + x^3 + xy^2, \quad y' = -x + x^2y + y^3,$$

$$\big(x(0), y(0)\big) = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\Big)$$

auf $\mathbb{R}^2$.