Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge durch einen ausführlichen Text zu begründen. Für jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

Aufgabe 1: (4+2 Punkte)

a) Für $c \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, bezeichne $\partial B(c, r)$ den Rand der Kreisscheibe mit Mittelpunkt c und Radius r in der komplexen Ebene. Der Rand der Kreisscheibe werde einmal entgegen dem Uhrzeigersinn, d.h. in mathematisch positiver Richtung, durchlaufen. Berechnen Sie die Integrale

$$\int_{\partial B(20,19)} \frac{\cos(z^2+1)}{z^2-2019}\,dz \qquad \text{und} \qquad \int_{\partial B(0,2)} \frac{\sin(z)}{(z-1)^3}\,dz\,.$$

b) Berechnen Sie die Umlaufszahl/Windungszahl um Null für den Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = (\cos(e^{it}))^2$.

Aufgabe 2: (2+1+2+1 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = x^2y + xy^2 - xy.$$

a) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f und untersuchen Sie, ob an diesen lokale Extrema vorliegen oder ob es sich um Sattelpunkte handelt.

b) Bestimmen Sie die Nullstellen von f und skizzieren Sie in $Q = (-1, 2) \times (-1, 2) \subset \mathbb{R}^2$ die Menge $\{(x, y) \in Q | f(x, y) = 0\}$.

c) Sei $T \subset \mathbb{R}^2$ das abgeschlossene Dreieck im ersten Quadranten, das durch die Geraden $y = 0$, $x = 0$ und $x + y - 1 = 0$ berandet ist. Begründen Sie, dass die Funktion f eingeschränkt auf T ihr Maximum und ihr Minimum annimmt und bestimmen Sie alle Punkte in T, an denen dieses Maximum bzw. dieses Minimum angenommen werden zusammen mit den zugehörigen Funktionswerten.

d) Skizzieren Sie nur mit Hilfe der Ergebnisse aus a) bis c) qualitativ die Niveaulinien der Funktion f im Quadrat Q, so dass man den Typ der kritischen Punkte klar aus der Skizze ablesen kann.

Aufgabe 3: (3+3 Punkte)

Sei $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen mit Eins als kleinstem Element.

a) Sei $B(0, 3/2)$ die offene Kreisscheibe um den Ursprung mit Radius $3/2$ in der komplexen Ebene. Bestimmen Sie alle holomorphen Funktionen $f : B(0, 3/2) \to \mathbb{C}$, die in allen $n \in \mathbb{N}$ die Werte

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2n}{2n+1}$$

annehmen.

Fortsetzung nächste Seite!

b) Formulieren Sie das Maximumprinzip für beschränkte Gebiete (auch Randmaximumprinzip für holomorphe Funktionen genannt) und beweisen Sie damit die folgende Aussage: Für $c \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, bezeichne $B(c,r)$ die offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt c und Radius r in der komplexen Ebene. Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein offenes Gebiet und $B = B(c,r)$ eine Kreisscheibe mit $\bar{B} \subset D$. Weiter sei $f\colon D \to \mathbb{C}$ holomorph mit

$$\min_{z \in \partial B} |f(z)| > |f(c)|\,.$$

Dann besitzt f eine Nullstelle in B.

Aufgabe 4: (2+1+3 Punkte)

Sei $\beta \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die homogene Differentialgleichung

$$y'' - 2\beta y' + \beta^2 y = 0\,.$$

b) Bestimmen Sie alle Werte $\beta \in \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = 0$$

für alle Lösungen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der homogenen Gleichung mit dem jeweiligen Parameter β.

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$y''(t) - 2\beta y'(t) + \beta^2 y(t) = e^{-2t}, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Hinweis zu c): Eine Fallunterscheidung in β ist notwendig.

Aufgabe 5: (3+3 Punkte)

a) Geben Sie zu beliebig vorgegebenen Anfangswerten $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung des linearen Systems von Differentialgleichungen

$$x' = y \quad \text{und} \quad y' = x \quad \text{mit Anfangsbedingungen } x(0) = x_0,\ y(0) = y_0$$

explizit an und weisen Sie nach, dass diese Lösung die einzige Lösung ist. Zeigen Sie weiter, dass es für jede Lösung des Systems eine Konstante $C(x_0, y_0)$ gibt mit

$$x(t)^2 - y(t)^2 = C(x_0, y_0) \quad \text{für alle } t\,.$$

Geben Sie $C(x_0, y_0)$ explizit an.

b) Sei $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt im offenen dritten Quadranten, d.h. es gelte $x_0 < 0$ und $y_0 < 0$. Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$y'(x) = \frac{y^2 + 1}{2xy}\,, \quad y(x_0) = y_0$$

eine eindeutig bestimmte maximale Lösung besitzt und bestimmen Sie diese explizit unter Angabe ihres Definitionsbereichs.