Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Alle Rechnungen und Schlussfolgerungen sind mit einem erklärenden Text zu versehen; Lösungen, die nur aus Rechnungen bestehen, erhalten keinen Punkt. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben.

Aufgabe 1 (3+3=6 Punkte)

a) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph, und
$$\exp(f(z)) = c$$
für ein $c \in \mathbb{C}$ und alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie: f ist konstant.

b) Sei $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und $M \in \mathbb{R}$ mit $\operatorname{Re}(g(z)) \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
Zeigen Sie: g ist konstant.

Hinweis: Betrachten Sie $\exp(g(z))$ und verwenden Sie a).

Aufgabe 2 (2+2+2=6 Punkte)

a) Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C}$ definiert durch $f(z) = \frac{3z+1}{z+1}$. Bestimmen Sie das Bild von $B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$ unter f.

b) Es seien $B_2(1) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-1| < 2\}$ und $G = \{x + iy \in \mathbb{C} \,|\, x, y \in \mathbb{R}, x < 0\}$. Bestimmen Sie eine biholomorphe Abbildung $g : B_2(1) \to G$.

c) Zeigen oder widerlegen Sie, dass es eine biholomorphe Abbildung
$$h : \mathbb{C} \setminus \{x + iy \,|\, y = 0, x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)\} \to B_1(0)$$
gibt.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3 (1+3+2=6 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$(y_1, y_2) \mapsto (y_1^2 - y_1(y_2+1) - 2, -2y_2)^T.$$

a) Bestimmen Sie die Gleichgewichtspunkte von $y' = f(y)$.

b) Seien $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ und $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\tilde{f}(y_1, y_2) := f(y_1 + c_1, y_2 + c_2)$. Zeigen Sie, dass y eine asymptotisch stabile Lösung von $y' = f(y)$ genau dann ist,wenn $\tilde{y} = y - c$ eine asymptotisch stabile Lösung von $\tilde{y}' = \tilde{f}(\tilde{y})$ ist.

c) Überprüfen Sie, ob die Gleichgewichtspunkte aus a) asymptotisch stabile Lösungen sind.

Aufgabe 4 (1+5=6 Punkte)

Wir betrachten den Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\gamma(t) = \begin{cases} e^{i\pi/2} + e^{2i(t-\pi)} & \text{für } t \in [0, \pi], \\ -1 + i + 2e^{4it} & \text{für } t \in (\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie den Weg γ (entweder in Worten oder mit Hilfe einer Skizze).

b) Berechnen Sie

$$\int_\gamma \frac{(z - (2-i)) \cdot e^{iz}}{(z^2+1)(z^2 - 3 + 4i)} dz.$$

Hinweis: Berechnen Sie $(2-i)^2$.

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y_1' = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{y_1}{1+t} \\ y_2' = \dfrac{t}{t^2 - 1} y_2 + \alpha y_1 \end{cases}$$

mit $(y_1(0), y_2(0)) = (2, 1)$ für den Fall $\alpha = 1$, indem Sie zunächst den Fall $\alpha = 0$ betrachten.