Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Alle Rechnungen und Schlussfolgerungen sind mit einem erklärenden Text zu versehen; Lösungen, die nur aus Rechnungen bestehen, erhalten keinen Punkt. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben.

Aufgabe 1 (2+2+2=6 Punkte)

Betrachten Sie die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gegeben durch

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}.$$

a) Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{R}$ punktweise konvergiert und bestimmen Sie die Grenzfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

b) Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ gegen f konvergiert.

c) Sei $q \in [0, 1[$ und $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq q\}$. Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf A gleichmäßig gegen f konvergiert.

Aufgabe 2 (2+1+3=6 Punkte)

a)

(i) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{n^2 z^2 + 8} \tag{1}$$

absolut konvergiert für jedes $z \in \mathbb{R}$ und die Funktion $f : z \mapsto f(z)$, die so entsteht, stetig ist auf $\mathbb{R}$.

(ii) Geben Sie (ohne Beweis) die größte offene Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ an, so dass die Funktion f durch (1) auf U definiert und dort holomorph ist.

b) Die komplexen Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ (mit $n \geq 1$) erfüllen $|a_j| = 1$ für $j = 1, \ldots, n$. Zeigen Sie, dass es einen Punkt $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ gibt, so dass das Produkt der Abstände zwischen z und a_j, für $j = 1, \ldots, n$, mindestens 1 ist.
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $f(z) := (z - a_1) \cdot \ldots \cdot (z - a_n)$.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3 (3+3=6 Punkte)

a) Die Zahl $a \in \mathbb{R}$ erfüllt $a > 1$. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$ze^{a-z} = 1$$

genau eine Lösung $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ besitzt und dass diese Lösung reell und positiv ist.
Hinweis: Wenden Sie den Satz von Rouché auf die Funktion $f(z) := ze^{a-z} - 1$ an und wählen Sie als Vergleichsfunktion $g(z) := ze^{a-z}$.

b) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{3 + 2\cos(\theta)}\, d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{5}}.$$

Aufgabe 4 (3+3=6 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ ein Lipschitz-stetiges Vektorfeld mit $\langle f(x), x\rangle = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. (Dabei bezeichne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^n$.) Man zeige:

a) Für jede auf einem offenen Intervall J definierte Lösung $\varphi : J \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ der Differentialgleichung $x' = f(x)$ ist die Euklidische Norm $|\varphi(t)|$ konstant.

b) Jede auf einem offenen Intervall J definierte Lösung φ kann zu einer Lösung $\widetilde{\varphi} :\to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ fortgesetzt werden.

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Gegeben sei das ebene autonome System

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x^3 - y\,. \end{aligned}$$

Man zeige, dass dieses System den Nullpunkt als einzige Ruhelage hat und dass die Nullösung stabil ist.
Hinweis: Man suche eine Ljapunow-Funktion der Form $V(x, y) = \alpha x^4 + \beta y^2$ mit Konstanten $\alpha, \beta > 0$.
Zur Erinnerung: Eine Ljapunow-Funktion für das Vektorfeld $f(x, y)$ auf $\mathbb{R}^2$ ist eine stetig differenzierbare Funktion $V(x, y)$, die längs jeder Integralkurve von f fällt; d.h. $\langle \operatorname{grad} V(x, y), f(x, y)\rangle \leq 0$.