

**Thema Nr. 1**  
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!

Alle Rechnungen und Schlussfolgerungen sind mit einem erklärenden Text zu versehen; Lösungen, die nur aus Rechnungen bestehen, erhalten keinen Punkt. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben.

**Aufgabe 1** (3+3=6 Punkte)

- a) Bestimmen Sie die Menge  $K \subset \mathbb{R}$ , die genau diejenigen  $x \in \mathbb{R}$  enthält, für welche die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2x+3)^k}{\sqrt{k}}$  gegen eine reelle Zahl konvergiert.
- b) Für  $a \in \mathbb{C}$  bezeichne  $\gamma_a : [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  den durch  $\gamma_a(t) := a + 2e^{it}$  beschriebenen Weg. Bestimmen Sie den Wert des komplexen Wegintegrals

$$\int_{\gamma_a} \frac{1-2z^2}{z^3} dz$$

für alle  $a \in \mathbb{C}$  mit  $|a| \neq 2$ .

**Aufgabe 2** (1+1+4=6 Punkte)

Bezeichne  $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq -x^2\}$  den Definitionsbereich der Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) := x^2 + y^2 + 2y$ .

- a) Skizzieren Sie die Menge  $D$ .
- b) Zeigen Sie, dass die Funktion  $f$  ein globales Minimum besitzt.
- c) Bestimmen Sie das globale Minimum von  $f$  sowie alle Stellen in  $D$ , bei denen dieses angenommen wird.

Fortsetzung nächste Seite!

**Aufgabe 3** (3+3=6 Punkte)

In dieser Aufgabe sollen Existenz und Eindeutigkeit globaler Lösungen  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  der Anfangswertaufgaben

$$\dot{x}(t) = 2\sqrt{|x(t)|} \cdot \cos t, \quad x(0) = c,$$

für  $c \in [0, \infty[$  diskutiert werden. Unter einer globalen Lösung verstehen wir in dieser Aufgabe stets eine Lösung, die auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert ist.

- Bestimmen Sie für jedes  $c > 1$  eine globale Lösung  $x_c$  des entsprechenden Anfangswertproblems. Warum ist diese deren einzige globale Lösung?
- Geben Sie für jedes  $0 \leq c \leq 1$  jeweils zwei verschiedene globale Lösungen des Anfangswertproblems an (eine Begründung ist nicht verlangt).

**Aufgabe 4** (2+4=6 Punkte)

In dieser Aufgabe bezeichne  $H := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$  die obere Halbebene und  $S := \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re}(z) < 1\}$  einen Streifen in  $\mathbb{C}$ .

- Geben Sie (mit Begründung) eine holomorphe, bijektive Abbildung  $g : S \rightarrow H$  an.
- Bestimmen Sie eine holomorphe, bijektive Abbildung  $f : S \rightarrow S$  mit  $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ .

**Aufgabe 5** (2+2+2=6 Punkte)

Geben Sie jeweils entweder ein Beispiel an (ohne Begründung) oder begründen Sie, warum es ein solches nicht geben kann.

- Eine holomorphe Funktion  $h : \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 2\} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\lim_{z \rightarrow 0} h(z)\sqrt{|z|} = 1$ .
- Eine stetig differenzierbare Abbildung  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit den Eigenschaften (i)–(iii):
  - $F(0) = 0$
  - Die Realteile der Eigenwerte der Ableitung  $DF(0)$  sind kleiner oder gleich 0.
  - 0 ist keine stabile Ruhelage der Differentialgleichung  $y' = F(y)$ .
- Ein Polynom  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit der Eigenschaft, dass die Differentialgleichung  $y' = P(y)$  keine globale Lösung  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  besitzt.