Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Alle Rechnungen und Schlussfolgerungen sind mit einem erklärenden Text zu versehen; Lösungen, die nur aus Rechnungen bestehen, erhalten keinen Punkt. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben.

Aufgabe 1:

(a) *Dezimalziffern einer rationalen Zahl $a/b \in [0,1[$:* Gegeben seien zwei Zahlen $a \in \mathbb{N}_0$ und $b \in \mathbb{N}$ mit $a < b$. Die Folgen $(r_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ werden wie folgt rekursiv definiert:

$$r_0 := a, \qquad z_{n+1} := \left\lfloor \frac{10r_n}{b} \right\rfloor, \qquad r_{n+1} := 10r_n - bz_{n+1} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

Hierbei bezeichnet $\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} | \; k \leq x\}$ den ganzzahligen Anteil von $x \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$0 \leq r_n < b$, $r_n \in \mathbb{N}_0$, $z_{n+1} \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ und

$$\frac{a}{b} = \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{10^k} + \frac{r_n}{10^n b}.$$

(b) Beweisen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{10^n} = 0,$$

indem Sie explizit die Definition der Konvergenz reeller Folgen nachprüfen.

(c) Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{10^k} = \frac{a}{b}$$

(3+1+2 Punkte)

Aufgabe 2:

Es sei $u_0 > 0$. Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u(0) = u_0, \\ \\ u'(t) = u(t)^{u(t)}, \qquad t \geq 0. \end{cases}$$

(a) Man zeige, dass für jedes $u_0 > 0$ eine eindeutige maximale (nicht fortsetzbare) Lösung existiert.

(b) Man zeige für jedes $u_0 > 0$, dass die maximale Lösung nicht global auf $\mathbb{R}_0^+$ definiert ist.
Hinweis: Betrachten Sie erst den Fall $u_0 > 1$.

(2+4 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:

(a) Formulieren Sie die Kettenregel für Funktionen mehrerer Veränderlicher.

(b) Von einer beliebig oft differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei bekannt:

$$\begin{aligned} &f(0,0) = 0, \\ &D_1 f(0,0) = 1, \quad D_2 f(0,0) = 2. \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet D_j den partiellen Ableitungsoperator nach der j-ten Koordinate. Auch sei eine weitere Funktion g wie folgt gegeben:

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(t) = f(\ f(t,t)\ ,\ f(-t,t^2)\ ).$$

Berechnen Sie den Wert der Ableitung $g'(0)$.

(c) Bestimmen Sie den Wertebereich $W(f)$ der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1,x_2,x_3) = (x_1,x_2,x_3) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

(1+3+2 Punkte)

Aufgabe 4:

Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für das folgende Differentialgleichungssystem:

$$x'(t) = \begin{pmatrix} f'(t) & g'(t) \\ -g'(t) & f'(t) \end{pmatrix} x(t)$$

Begründen Sie Ihre Wahl.

Hinweis: Die Matrix $\exp \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ für $a, b \in \mathbb{R}$ kann hilfreich sein.

(6 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5:

Im folgenden bezeichnet $\mathbb{H}_+ := \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Im} z > 0\}$ bzw. $\mathbb{H}_- := \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Im} z < 0\}$ die offene obere bzw. untere Halbebene in $\mathbb{C}$, und $\overline{\mathbb{H}_+} = \mathbb{H}_+ \cup \mathbb{R}$ und $\overline{\mathbb{H}_-} = \mathbb{H}_- \cup \mathbb{R}$ deren Abschluss.

(a) Formulieren Sie eine Version des Satzes von Morera.

(b) Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, deren Einschränkungen $f|_{\mathbb{H}_+}$ und $f|_{\mathbb{H}_-}$ auf die offene obere bzw. untere Halbebene holomorph sind.
Beweisen Sie, dass f holomorph ist.

(c) Formulieren Sie den Satz von Liouville für ganze holomorphe Funktionen.

(d) Gegeben seien vier beschränkte stetige Funktionen $G_+, H_+ : \overline{\mathbb{H}_+} \to \mathbb{C}$ und $G_-, H_- : \overline{\mathbb{H}_-} \to \mathbb{C}$, deren Einschränkungen $G_+|_{\mathbb{H}_+}$, $H_+|_{\mathbb{H}_+}$ und $G_-|_{\mathbb{H}_-}$, $H_-|_{\mathbb{H}_-}$ auf die obere bzw. untere offene Halbebene holomorph sind. Es gelte $G_+(x) - G_-(x) = H_+(x) - H_-(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass es eine Konstante $c \in \mathbb{C}$ gibt, so dass $G_+ = H_+ + c$ und $G_- = H_- + c$ gilt.

(1+2+1+2 Punkte)