## Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Alle Rechnungen und Schlussfolgerungen sind mit einem erklärenden Text zu versehen; Lösungen, die nur aus Rechnungen bestehen, erhalten keinen Punkt. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben.

**Aufgabe 1: (2+2+2 Punkte)**

(a) Gegeben sei die Funktion $f(z) := z^2\overline{z}$, $z \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie alle Punkte $z \in \mathbb{C}$, für die die komplexe Ableitung $f'(z)$ existiert.

(b) Die Funktion $h(z) := \dfrac{z^8 + z^4 + 2}{(z-1)^3(9z^2 + 12z + 4)}$ sei für alle $z \in \mathbb{C}$ definiert, für die der Nenner nicht verschwindet. Bestimmen Sie für jede Singularität von $h$ (in $\mathbb{C}$) den Typ. Ist $z = \infty$ eine Singularität von $h$? Falls ja, von welchem Typ?

(c) Sei $D$ das Dreiecksgebiet in der komplexen Ebene, das durch die Punkte $0 + 0i$, $1 + 0i$ und $1 + i$ aufgespannt wird. Sei weiter $\gamma$ ein Weg, dessen Spur den Rand von $D$ gegen den Uhrzeigersinn einmal durchläuft. Berechnen Sie das Wegintegral

$$\int_\gamma |z|^2 \, dz.$$

**Aufgabe 2: (2+2+2 Punkte)**
Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) Jede überall partiell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist stetig.

(b) Sei $\Omega$ ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, und es gebe ein $z_0 \in \Omega$ mit

$$|f(z_0)| \leq |f(z)| \qquad \forall z \in \Omega.$$

Dann ist $f$ konstant.

(c) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar.

Fortsetzung nächste Seite!

**Aufgabe 3: (2+4 Punkte)**

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $n = 1, 2, \ldots$ gilt:

$$\int_0^{2\pi} (\cos(\theta))^{2n}\, d\theta = \frac{\pi(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2}.$$

(b) Für jedes $R > 0$ sei der geschlossene Weg $\gamma_R = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ (der also zuerst $\gamma_1$, dann $\gamma_2$ und zuletzt $\gamma_3$ durchläuft) definiert durch

$$\begin{aligned} \gamma_1(x) &= x, & x &\in [0, R] \\ \gamma_2(\theta) &= Re^{i\theta}, & \theta &\in [0, \tfrac{\pi}{4}] \\ \gamma_3(t) &= -te^{i\pi/4}, & t &\in [-R, 0]. \end{aligned}$$

Betrachten Sie das Wegintegral $\int_{\gamma_R} e^{iz^2}\, dz$, um zu zeigen, dass die uneigentlichen Integrale

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\, dx \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \cos(x^2)\, dx$$

gleich sind und den gemeinsamen Wert $\sqrt{\frac{\pi}{8}}$ haben.
**Hinweis:** Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\int_0^\infty e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ und dass $\sin(u) \geq \frac{2u}{\pi}$ für alle $0 \leq u \leq \pi/2$ gilt.

**Aufgabe 4: (2+2+2 Punkte)**
Sei auf $\mathbb{R}^3$ das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz \\ zx \\ xy \end{pmatrix} =: v\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben und sei $u(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix}$, $t \in J$, dessen maximale Lösung.

(a) Man zeige: Die Funktionen

$$E_1(x, y, z) := x^2 - y^2 \text{ und } E_2(x, y, z) := y^2 - z^2$$

sind *erste Integrale* von $v$. (Ein erstes Integral ist eine *Erhaltungsgröße*, also eine stetig differenzierbare Funktion $E$, deren Ableitung längs des Vektorfeldes $v$ verschwindet; d.h. $E'(x, y, z)v(x, y, z) = 0$. Ein erstes Integral ist demnach auf Integralkurven konstant.)

(b) Man zeige: Für $t$ nahe 0 gilt $\alpha(t) = -\beta(t) = \gamma(t)$.
**Hinweis:** Es gilt $E_i(u(t)) = E_i(u(0))$ für alle $t$, $i = 1, 2$.

(c) Man bestimme die Lösung $u(t)$ und das (maximale) Definitionsintervall $J$.

Fortsetzung nächste Seite!

**Aufgabe 5: (2+2+2 Punkte)**

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto |\cos x| + t^2$. Man zeige:

(a) Es gibt ein Intervall $]-\delta, \delta[$, auf dem das Anfangswertproblem $x' = f(t, x)$, $x(0) = 0$ eine und nur eine Lösung besitzt.

(b) Ist $\alpha(t)$, $t \in ]a, b[$ mit $a < 0 < b$, eine Lösung des vorstehenden Anfangswertproblems, so ist $\widetilde{\alpha}(s) := -\alpha(-s), s \in ]-b, -a[$, ebenfalls eine Lösung.

(c) Sei $\alpha(t)$, $-\infty \leq t^- < t < t^+ \leq +\infty$, die maximale Lösung des Anfangswertproblems.

   (i) Es gilt $t^- = -t^+$. **Hinweis:** Man verwende (b).

   (ii) Es gilt $t^- = -\infty$, $t^+ = \infty$.