Thema Nr. 3

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge durch einen ausführlichen zusammenhängenden Text zu begründen!

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Für jede der 5 Aufgaben werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

— — — — — —

Aufgabe 1:

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{C}\backslash\{0, -1, -1+i\} \to \mathbb{C} \qquad f(z) = \frac{z}{(z^2+z)(z+1-i)^2} .$$

$\gamma(r)$ bezeichne den Weg entlang der Kreislinie mit Mittelpunkt 0 und Radius $r > 0$ mit einem Umlauf in positiver Richtung. Bestimmen Sie für alle Werte $r \in \mathbb{R}^+\backslash\{1, \sqrt{2}\}$ den Wert des Integrales

$$W(r) := \int_{\gamma(r)} f(z)dz .$$

(6 Punkte)

Aufgabe 2:

a) Geben Sie die Definitionen für die Begriffe "isolierte Singularität", "hebbare Singularität", "Polstelle" sowie "wesentliche Singularität" an.

b) Bestimmen Sie Lage und Art aller isolierten Singularitäten der Funktion $h : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$h(z) = \frac{z}{z-2} \exp\left(\sin\left(\frac{z-1}{z^2-z}\right)\right) ,$$

wobei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ den maximal möglichen Definitionsbereich der Funktion bezeichnet.

Achten Sie jeweils bei Ihrer Entscheidung über die Art der Singularitäten auf eine ausführliche Begründung!

(2+4 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$f' = f(f-1)(f+1)$$

für eine reellwertige Funktion f in einer reellen Veränderlichen.

a) Zeigen Sie unter Nennung geeigneter Sätze, dass diese Differentialgleichung für jedes $f_0 \in \mathbb{R}$ eine eindeutige maximale Lösung f mit $f(0) = f_0$ besitzt.

b) Sei nun $f_0 < 1$. Zeigen Sie, dass für keine reelle Zahl a mit $a > 1$ ein t im Definitionsbereich von f existiert, so dass $f(t) = a$ gilt.

c) Sei $f_0 > 1$. Zeigen Sie, dass für jede reelle Zahl a mit $a > 1$ ein t im Definitionsbereich von f mit $f(t) = a$ existiert.

(1+2+3 Punkte)

Aufgabe 4:

a) Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Für ein $M \in \mathbb{R}^+$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ gelte:

$$|f(z)| \leq M|z|^\alpha \quad \forall\, z \in \mathbb{C}\,.$$

Zeigen Sie: $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n > \alpha$, hierbei bezeichne $f^{(n)}$ die n-te Ableitung von f, $f^{(0)} = f$.

b) Es sei $n_0 \in \mathbb{N}_0$, $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion mit $p^{(n)}(0) = 0$ für alle $n > n_0$.
Zeigen Sie: p ist Polynom vom Grad n_0.

c) f erfülle die Voraussetzungen von Aufgabenteil a). Zeigen Sie: f ist entweder konstant oder hat mindestens eine Nullstelle.

(3+2+1 Punkte)

Aufgabe 5:

Gegeben sei der Ellipsenrand $E \subset \mathbb{R}^2$ durch $(x, y) \in E \Leftrightarrow x^2 + 2y^2 = 2$ sowie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x, y) = x^3 - 3y^4$.

Begründen Sie, warum f sein Maximum und sein Minimum auf E annimmt. Bestimmen Sie sodann den maximalen sowie den minimalen Wert, den $f(x, y)$ unter der Nebenbedingung $(x, y) \in E$ annimmt und diejenigen Stellen, an denen das globale Maximum und das globale Minimum angenommen wird. (6 Punkte)