Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge durch einen ausführlichen zusammenhängenden Text zu begründen!

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Für jede der 5 Aufgaben werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

— — — — — —

Aufgabe 1:
Es sei $\mathbb{D}$ die offene komplexe Einheitskreisscheibe. Darüber hinaus seien f und g auf einer Umgebung von $\overline{\mathbb{D}}$ holomorphe Funktionen, die keine Nullstelle in $\mathbb{D}$ besitzen. Zeigen Sie: Gilt $|f| = |g|$ auf $\partial\mathbb{D}$, so gibt es eine Konstante c mit $|c| = 1$, so dass $f = cg$ auf $\overline{\mathbb{D}}$.
Hinweis: Man nehme zunächst an, dass auch auf $\partial\mathbb{D}$ keine Nullstellen von g liegen.

(6 Punkte)

Aufgabe 2:

a) Existiert eine Folge von Punkten in der offenen oberen komplexen Halbebene, die alle Punkte von $\mathbb{R}$ und keine anderen Häufungswerte hat? Geben Sie eine ausführlich begründete Antwort.

b) Zeigen Sie, dass es eine Folge von Punkten in der offenen komplexen Einheitskreisscheibe gibt, die genau die Punkte der (komplexen) Einheitskreislinie als Häufungswerte hat, und weisen Sie nach, dass diese Eigenschaften tatsächlich erfüllt sind.

(3+3 Punkte)

Aufgabe 3:
Beweisen Sie, dass jedes Polynom mit komplexen Koeffizienten vom Grad $n \geq 1$, $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1}z^{n-1} + z^n$, genau n Nullstellen in $\mathbb{C}$ besitzt (mit Vielfachheit gezählt) mithilfe

a) des Satzes von Rouché,

b) des Null- und Polstellen zählenden Integrals, indem Sie den Quotienten

$$\frac{p'(z)}{p(z)} =: \frac{n}{z}(1 + g(z))$$

betrachten und die so definierte Funktion g geeignet abschätzen.

(2+4 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Es sei $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ eine stetige, matrixwertige Funktion. Betrachten Sie die zugehörige Differentialgleichung

$$\dot{x} = A(t)x. \tag{1}$$

a) Es seien $x_1(t), ..., x_n(t), t \in \mathbb{R}$, Lösungen von (1). Ferner seien für ein $t_0 \in \mathbb{R}$ die Vektoren $x_1(t_0), ..., x_n(t_0)$ im $\mathbb{R}^n$ linear unabhängig. Zeigen Sie, dass dann für alle $t_1 \in \mathbb{R}$ die Vektoren $x_1(t_1), ..., x_n(t_1)$ im $\mathbb{R}^n$ linear unabhängig sind.

   Hinweis: Benutzen Sie das Superpositionsprinzip für lineare homogene Differentialgleichungen oder benutzen Sie die Differentialgleichung für Wronski-Determinanten.

b) Erklären Sie die Begriffe Fundamentalmatrix und Übergangsmatrix (auch Transitionsmatrix oder Hauptfundamentalmatrix genannt). Wie erhält man aus (a) eine Fundamentalmatrix und wie lässt sich die Lösung von (1) mit Anfangswert $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, t_0 \in \mathbb{R}$, mithilfe der Übergangsmatrix ausdrücken?

c) Zeigen Sie: Sind $\Phi_1(t), \Phi_2(t), t \in \mathbb{R}$, Fundamentalmatrizen, so existiert eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$\Phi_1(t) = \Phi_2(t)C, t \in \mathbb{R}.$$

(2+2+2 Punkte)

Aufgabe 5:

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) + 2c\dot{y}(t) + y(t) = 0 \tag{2}$$

mit einer Konstanten $c > 0$.

a) Zeigen Sie, dass in allen drei Fällen $c^2-1 > 0$, $c^2-1 = 0$ und $c^2-1 < 0$ die Differentialgleichung asymptotisch stabil ist.

b) Sei $y(t)$ Lösung von (2) zum Anfangswert $(y(t_0), \dot{y}(t_0)) = (y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$, $t_0 \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)$.

c) Bestimmen Sie im Fall $c^2 - 1 < 0$ die Lösung zu den Anfangsbedingungen

$$y(0) = 1,\ \dot{y}(0) = 0.$$

   Hierbei ist die Abkürzung $a := \sqrt{1-c^2}$ nützlich.

(2+2+2 Punkte)