Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Alle Rechnungen und Schlussfolgerungen sind mit einem erklärenden Text zu versehen; Lösungen, die nur aus Rechnungen bestehen, erhalten keinen Punkt. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben.

Aufgabe 1:
Betrachten Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x' &= x - 2y\,, \\ y' &= ax + y - y^2\,, \end{aligned}$$

mit dem reellen Parameter $a < 0$.

a) Bestimmen Sie alle konstanten Lösungen des Systems.
b) Untersuchen Sie alle konstanten Lösungen auf ihre Stabilität in Abhängigkeit vom Parameter a.
c) Skizzieren Sie das Phasenporträt in der Nähe der konstanten Lösungen für den Fall $a = -1$.

(6 Punkte)

Aufgabe 2:
Auf $\mathbb{R}^2$ sei die reellwertige Funktion $(x, y) \mapsto u(x, y) = (x - y)(x + y + 1)$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ harmonisch ist.
b) Bestimmen Sie alle Funktionen $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto v(x, y)$, so dass $f = u + iv$ holomorph ist und geben Sie f als Funktion von $z = x + iy \in \mathbb{C}$ an.

(6 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:

Gegeben sei eine holomorphe Funktion f auf einer Umgebung von $z_0 \in \mathbb{C}$ mit einer Nullstelle der Ordnung $p \in \mathbb{N}$ in z_0 durch die Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=p}^{\infty} a_n (z - z_0)^n .$$

a) Geben Sie eine Rekursionsformel für die Koeffizienten der Laurent-Entwicklung der Funktion $1/f$ um z_0 an.

b) Berechnen Sie den Hauptteil der Laurent Entwicklung der Funktion $z \mapsto \frac{1}{\sin(z)}$ jeweils um $z_0 = 0$ und um $z_0' = \pi$.

c) Sei Γ die Kreislinie $|z - 3/2| = 2$ orientiert im positiven Sinn. Berechnen Sie

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{\sin(z)} .$$

(6 Punkte)

Aufgabe 4:

Es sei $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ stetig. Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(x)(1 - y(x)) , \qquad y(0) = 0 .$$

a) Ist das Anfangswertproblem eindeutig lösbar?

b) Untersuchen Sie die Lösungen y auf etwaige Monotonie.

c) Zeigen Sie, dass $\lim_{x \to \infty} y(x)$ existiert und bestimmen Sie den Wert.

d) Geben Sie explizit die Lösung im Fall $f(x) = \alpha x^{\beta - 1}$ an, wobei $\alpha > 0$ und $\beta \geq 1$.

(6 Punkte)

Aufgabe 5:

Für die holomorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gelte $|f(z)| \leq |g(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie: Es gibt ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| \leq 1$, so dass $f(z) = \lambda g(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(6 Punkte)