Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Alle Rechnungen und Schlussfolgerungen sind mit einem erklärenden Text zu versehen; Lösungen, die nur aus Rechnungen bestehen, erhalten keinen Punkt. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben.

Aufgabe 1:

Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

i) Es sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Dann gibt es ein $t \in (0,1)$ mit $f'(t) = 1$.

ii) Ist $A \subseteq \mathbb{R}^2$ abgeschlossen und $f\colon A \to \mathbb{R}$ stetig, so ist f beschränkt.

iii) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und nicht konstant, sowie $U \subseteq \mathbb{R}$ offen. Dann ist $f(U)$ offen.

iv) Es sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar und nicht konstant, sowie $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Dann ist $f(U)$ offen.

v) Es gibt eine bijektive holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

vi) Es gibt eine holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ mit $f'(z) = \frac{1}{z}$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(6 Punkte)

Aufgabe 2:

a) Bestimmen Sie die Laurentreihen-Entwicklung mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ von

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+1)} + \frac{\sin z}{z^2}$$

im Gebiet $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$.

b) Bestimmen Sie alle isolierten Singularitäten von f und deren Typ.

c) Berechnen Sie

$$\int\limits_{|z-1|=\frac{3}{2}} f(z)\, dz.$$

(6 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:
Es sei $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $|h(z)| \leq 2$ für alle $|z| = 2$ und $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) = h(z)^3 + 4z^2 - z + 1 \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

a) Bestimmen Sie die Zahl der Nullstellen (gezählt mit Vielfachheit) von f im Gebiet $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$.

b) Sei nun $h(z) = \frac{z}{2}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie die Zahl der Nullstellen von f in $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

(6 Punkte)

Aufgabe 4:
Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} y(t)\,.$$

a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für dieses Differentialgleichungssystem.

b) Bestimmen Sie die Lösung dieses Differentialgleichungssystems mit dem Anfangswert

$$y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Ist die Nulllösung für dieses Differentialgleichungssystem stabil?

(6 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5:

a) Es sei $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(t, y) = e^t \sin y$ für alle $t, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f lokal Lipschitz-stetig bezüglich y ist.

b) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'(t) &= e^t \sin(y(t)), \qquad t > 0, \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung $y\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ besitzt.

c) Zeigen Sie, dass $y(t) > 0$ für alle $t \geq 0$ gilt, wobei y die Lösung aus Aufgabenteil b) bezeichne.

(6 Punkte)