Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Alle Rechnungen und Schlussfolgerungen sind mit einem erklärenden Text zu versehen; Lösungen, die nur aus Rechnungen bestehen, erhalten keinen Punkt. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben.

Aufgabe 1:
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein nichtleeres Gebiet und $f, g : G \to \mathbb{C}$ seien holomorph mit $f' = gf$.

Zeigen Sie: Hat f eine Nullstelle in G, so ist $f(z) = 0$ für alle $z \in G$. (6 Punkte)

Aufgabe 2:

a) Definieren Sie den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz für Folgen und Reihen von komplexwertigen Funktionen auf einer Teilmenge von $\mathbb{C}$.

b) Es sei $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ und $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ sei holomorph mit $f(0) = 0$.

   i) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(z^n)$ auf jeder in $\mathbb{E}$ enthaltenen kompakten Menge gleichmäßig konvergiert.

   ii) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(z^n)$ i.A. nicht gleichmäßig auf $\mathbb{E}$ konvergiert.

(6 Punkte)

Aufgabe 3:
Es sei $0 < a < 1$. Zeigen Sie:

a) Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{e^{ax}}{1+e^x}$, ist über $\mathbb{R}$ integrierbar.

b) Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Integrieren Sie dazu eine geeignete holomorphe Funktion über den Rand der Rechtecke mit den Ecken $-R, R, R+2\pi i, -R+2\pi i$.

(6 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Für welche $x_0 \in \mathbb{R}$ ist das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = \sqrt[3]{x^2}, \qquad x(0) = x_0,$$

lokal eindeutig lösbar? Für welche $x_0 \in \mathbb{R}$ ist es global eindeutig lösbar?

Aufgabe 5:

Gegeben sei das autonome zweidimensionale Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \exp(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} &= -x \exp(1 - x^2 - y^2). \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass dieses System zu jedem Anfangswert genau eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung besitzt.

b) Zeigen Sie, dass die Orbits der Lösungen in konzentrischen Kreislinien (einschließlich Radius 0) um den Ursprung enthalten sind.

c) Zeigen Sie, dass jede nichtkonstante maximale Lösung periodisch ist, und bestimmen Sie die Periodenlänge.

(6 Punkte)