

**Thema Nr. 2**  
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!

Alle Rechnungen und Schlussfolgerungen sind mit einem erklärenden Text in ganzen Sätzen zu versehen; Lösungen, die nur aus Rechnungen bestehen, erhalten keinen Punkt. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben. Die Punkte für die Teilaufgaben sind jeweils in Klammern angegeben.

**Aufgabe 1:**

Betrachten Sie das Gebiet

$$G := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1, |z - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}\}.$$

Geben Sie eine biholomorphe Abbildung von  $G$  auf die Einheitskreisscheibe

$$\mathbb{E} = \{\omega \in \mathbb{C} \mid |\omega| < 1\}$$

an.

Hinweis: Bilden Sie zunächst  $G$  mit einer Möbiustransformation auf den Streifen  $S := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \text{Im } z < \pi\}$  ab und nutzen Sie dann die Exponentialfunktion.

**Aufgabe 2:**

Benutzen Sie den Residuensatz, um das uneigentliche reelle Integral

$$\int_0^\infty \frac{x \sin(x)}{x^2 + c^2} dx$$

für  $c \in \mathbb{R}$ ,  $c \neq 0$ , zu berechnen. Geben Sie insbesondere Integrationspfade explizit an und weisen Sie nach, dass die Werte der entsprechenden Kurvenintegrale gegen das gesuchte Integral konvergieren.

**Aufgabe 3:**

Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

- a) Sei  $f \in C^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ , und in  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$  gelte  $\nabla f(\mathbf{x}_0) = 0$  und  $D^2 f(\mathbf{x}_0) = 0$ . Dann hat  $f$  kein lokales Extremum in  $\mathbf{x}_0$ . (2 Punkte)
- b) Betrachten Sie das Vektorfeld  $F(\mathbf{x}) = (e^{x_1}, e^{x_2}, e^{x_3})^T$  auf  $\mathbb{R}^3$ . Das Kurvenintegral über  $F$  ist wegunabhängig. (2 Punkte)
- c) Die holomorphe Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  sei beschränkt längs der Geraden  $\{z \in \mathbb{C} \mid z = t(1 + i), t \in \mathbb{R}\}$ . Dann ist  $f$  konstant. (2 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

**Aufgabe 4:**

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$y' = t^2 \sqrt{1 + 2y}.$$

- a) Geben Sie die Lösung der zugehörigen Anfangswertaufgabe mit Anfangswert  $y(0) = 0$  auf dem Intervall  $[0, \infty)$  an. Warum ist sie dort eindeutig? (4 Punkte)
- b) Betrachten Sie die o.g. Differentialgleichung zum Anfangswert  $y(0) = -1/2$ . Geben Sie zwei verschiedene Lösungen dieser Anfangswertaufgabe explizit an. (2 Punkte)

**Aufgabe 5:**

Sei  $W(y) := |y|^{-12} - 2|y|^{-6}$  für  $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} u(x) + W'(u(x)) &= 0, \\ u(0) &= u_0, \\ \frac{du}{dx}(0) &= 0 \end{aligned}$$

zu beliebigen reellen Zahlen  $u_0 \neq 0$ .

- a) Skizzieren Sie  $W(\cdot)$ . (1 Punkt)
- b) Zeigen Sie, dass

$$L(u) := \frac{1}{2} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + W(u)$$

eine Erhaltungsgröße ist.

(1 Punkt)

- c) Zeigen Sie, dass dieses Anfangswertproblem für beliebige reelle Zahlen  $u_0 \neq 0$  auf  $\mathbb{R}$  eindeutig lösbar ist und dass Lösungen ihr Vorzeichen nicht wechseln. (4 Punkte)