Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge durch einen ausführlichen zusammenhängenden Text zu begründen!

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie jeweils für $\omega_0 = 1$ und $\omega_0 = \sqrt{2}$ die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{y} + 2y = 2\cos\omega_0 t\,.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 2:

a) Formulieren Sie den Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf.

b) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$y' = |y|^{\alpha}\,,\; y(0) = 0$$

genau im Fall $\alpha \geq 1$ eine eindeutige Lösung auf $[0, \infty)$ besitzt.

(6 Punkte)

Aufgabe 3:

Berechnen Sie die (lokale) Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} \frac{t}{1-t^2} & 1 \\ 0 & \frac{2t}{1-t^2} \end{pmatrix} y$$

jeweils zum Anfangswert

a) $y(0) = \binom{0}{1}$

b) $y(2) = \binom{0}{-\frac{1}{3}}$.

(6 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2 - i} dx \qquad (i = \sqrt{-1}).$$

(6 Punkte)

Aufgabe 5:

Mit $z_0 = 1 + i$ sei folgende rationale Funktion definiert:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z_0 - z)^3} \qquad (z \in \mathbb{C}\backslash\{1, z_0\}).$$

Bestimmen Sie (am einfachsten mit Hilfe der geometrischen Reihe) jeweils die Laurent-Reihen von f um $z = z_0$ bzw. um $z = 1$ mit ihren maximalen Konvergenzringen. Geben Sie jeweils die Hauptteile der Reihen an. (6 Punkte)