Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge durch einen ausführlichen zusammenhängenden Text zu begründen!

Aufgabe 1:

Sei $B(z_0, r)$ die offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt z_0 und Radius $r > 0$ in der komplexen Ebene.

a) Bestimmen Sie alle Nullstellen und alle isolierten Singularitäten der Funktion

$$f(z) = \frac{z^2(z-4)}{\sin(\pi z)}$$

sowie die Ordnung der Nullstellen und Polstellen von f, so welche vorliegen.

(b) Sei f die Funktion aus Aufgabenteil (a). Bestimmen Sie das Integral

$$\int_{\partial B(3/2,1)} f(z)dz\,.$$

(c) Bestimmen Sie das Integral

$$\int_{\partial B(0,4)} \frac{\cos z}{(z+1)^3}\,dz\,.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 2:

(a) Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion mit der Eigenschaft, dass $|f(z)| \geq \pi$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Zeigen Sie, dass $f(z) = f(\pi)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.

(b) Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion mit der Eigenschaft, dass $f(z+1) = f(z) = f(z+i)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

(6 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:

a) Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $c \in D$ und seien f und g auf D holomorph. Weiter habe g in c eine Nullstelle zweiter Ordnung. Zeigen Sie, dass

$$Res_c \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{6f'(c)g''(c) - 2f(c)g'''(c)}{3(g''(c))^2}.$$

(b) Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $c \in D$, und die auf $D \setminus \{c\}$ holomorphe Funktion h habe in c einen Pol m-ter Ordnung, $m \geq 1$. Sei p ein Polynom vom Grad $n \geq 1$. Zeigen Sie, dass $p \circ h$ in c einen Pol der Ordnung mn besitzt.

(6 Punkte)

Aufgabe 4:

a) Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y'(x) = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y(x) - 1)}, \quad y(0) = -1$$

und zeigen Sie, dass die Lösung für alle $x \geq 0$ existiert.

(b) Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y'(x) = 2y(x)^2 + xy(x)^2, \quad y(0) = 1,$$

bestimmen Sie das maximale Existenzintervall I, alle lokalen Extrema der Lösung y auf I und klassifizieren Sie diese nach Maxima und Minima.

(6 Punkte)

Aufgabe 5:

a) Bestimmen Sie das Volumen des Körpers im dreidimensionalen Anschauungsraum, der durch die Ebene $z = 0$, die Fläche $z = x^2 + 2y^2$ und die Ebenen $x + y = 1$, $-x + y = 1$, $x - y = 1$ und $-x - y = 1$ berandet wird.

b) Sei R das Gebiet in der euklidischen Ebene, das durch die Kurven $xy = \frac{\pi}{4}$, $xy = \frac{\pi}{2}$, $y(2-x) = 2$ und $y(2-x) = 4$ berandet wird. Bestimmen Sie das Integral

$$\int_R y \cos(xy) d(x, y).$$

Hinweis: Transformationssatz mit $x = 2v/(u + v)$ und $y = u + v$.

(6 Punkte)