

Thema Nr. 1
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge durch einen ausführlichen zusammenhängenden Text zu begründen!

Aufgabe 1:

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Bei richtigen Aussagen verweisen Sie auf einen passenden Satz der Funktionentheorie, bei falschen geben Sie ein Gegenbeispiel.

- a) Ist $(z_n)_n$ eine Folge in G mit $f(z_n) = 0$ für alle n , so ist $f(z) \equiv 0$.
- b) Ist $(z_n)_n$ eine Folge in G mit Häufungspunkt und $f(z_n) = 0$ für alle n , so ist $f(z) \equiv 0$.
- c) Ist $(z_n)_n$ eine Folge in G mit Häufungspunkt in G und $f(z_n) = 0$ für alle n , so ist $f(z) \equiv 0$.
- d) Ist f auf G beschränkt, so ist f konstant.
- e) Ist $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und f auf G beschränkt, so ist f konstant.
- f) Ist $G = \mathbb{C}$ und f auf G beschränkt, so ist f konstant.

(6 Punkte)

Aufgabe 2:

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R}).$$

Geben Sie ein Fundamentalsystem reeller Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$\dot{y} = Ay$$

an und untersuchen Sie, ob es stabile Lösungen besitzt. Berechnen Sie auch die Lösung, die der Anfangsbedingung $y(0) = (2, 0)^T$ genügt, und begründen Sie, warum diese Lösung eindeutig ist.

(6 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:

- a) Sei g eine positive differenzierbare Funktion. Welche Stammfunktion hat dann die Funktion g'/g ?
- b) Bestimmen Sie die Lösung $y = \varphi(x)$ des Anfangswertproblems

$$y' = -xy \ln y, \quad y(0) = e$$

und deren maximalen Definitionsbereich. Zeigen Sie, dass die Lösung auf diesem Definitionsbereich der Abschätzung $1 < \varphi(x) \leq e$ genügt, und skizzieren Sie den Graphen der Funktion φ .
(6 Punkte)

Aufgabe 4:

Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen des Polynoms $p(z) = 2z^5 - 6z^2 + z + 1$ im Ringgebiet $1 \leq |z| \leq 2$. Sind darunter auch reelle Nullstellen?

(6 Punkte)

Aufgabe 5:

Sei $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ und $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch mit $|f(z) - z| < |z|$ auf dem Rand von \mathbb{D} . Beweisen Sie, dass $|f'(1/2)| \leq 8$ gilt, und dass f in \mathbb{D} genau eine Nullstelle hat.

(6 Punkte)