**Thema Nr. 3**
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

*Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge durch einen ausführlichen zusammenhängenden Text zu begründen!*

**Aufgabe 1:**
Sei $f$ eine in einer Umgebung von $\overline{D}_2 := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\}$ definierte holomorphe Funktion mit

$$|f(z)| \leq 1 \qquad \forall z \in \overline{D}_2.$$

Zeigen Sie: Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq 1$ gilt $|f''(z)| \leq 4$.

Hinweis: Cauchy-Integralformel (6 Punkte)

**Aufgabe 2:**
Sei

$$A = \{0\} \cup \left\{\tfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Zeigen Sie: Jede auf ganz $\mathbb{C} \setminus A$ definierte, beschränkte, holomorphe Funktion ist konstant.

(6 Punkte)

**Aufgabe 3:**
Sei

$$f(x,t) := \frac{t^2}{(e^x - x)^2}.$$

a) Zeigen Sie, dass $e^x \neq x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist, also dass $f$ auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert ist.

b) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = f(x,t), \qquad x(0) = 0,$$

eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung hat.

(6 Punkte)

**Aufgabe 4:**
Bestimmen Sie alle Lösungen von

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 8x + 10y \\ \dot{y} &= -5x - 6y \end{aligned}$$

und skizzieren Sie das Phasenportrait. (6 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

**Aufgabe 5:**

Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $x_0 = x_0(t)$ eine $T$-periodische Lösung der minimalen Periode $T > 0$ von

$$\dot{x} = f(x).$$

Es sei $U(t)$ Fundamentalsystem der sogenannten Variationsgleichung

$$\dot{y} = Df(x_0(t))\, y,$$

d. h. die matrixwertige Lösung mit $U(0) = I$ (= Identität). Dabei ist $Df(x_0(t))$ die Ableitung (die Jacobi-Matrix) von $f$ in $x_0(t)$.

Zeigen Sie, dass $U(T)$ den Eigenwert 1 hat. (6 Punkte)