Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge durch einen ausführlichen zusammenhängenden Text zu begründen!

Aufgabe 1:
Gegeben sei die Möbius-Transformation $h(z) := \frac{1}{z-1}$. Sei $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{C}$ die offene Einheitskreisscheibe und $K \subseteq \mathbb{C}$ die abgeschlossene Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}\}$. Mit $\partial\mathbb{E}$ und ∂K werde der Rand von $\mathbb{E}$ bzw. K bezeichnet.

a) Man zeige, dass $h(\partial\mathbb{E})$ und $h(\partial K)$ parallele Geraden sind.

b) Man gebe die Geraden $h(\partial\mathbb{E})$ und $h(\partial K)$ jeweils explizit in der Form $ax + by = c$ an, wobei x und y Real- bzw. Imaginärteil von $z \in \mathbb{C}$ sind.

c) Man bestimme $h(\mathbb{E} \setminus K)$ explizit durch Ungleichungen der Form $ax + by \gtrless c$ und skizziere die Mengen $\mathbb{E} \setminus K$ und $h(\mathbb{E} \setminus K)$.

(6 Punkte)

Aufgabe 2:
Sei f eine in der offenen Einheitskreisscheibe $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{C}$ holomorphe Funktion, für die $|f(0)| < 1$ und $|f(z)| \leq 1$ für alle $z \in \mathbb{E}$ gilt.

Man zeige, dass dann sogar $|f(z)| < 1$ für alle $z \in \mathbb{E}$ gelten muss. (6 Punkte)

Aufgabe 3:
Man bestimme die Laurent-Entwicklung von $f(z) := \frac{z}{(z-1)(z-2)}$ in der Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ und in den Kreisringen $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ und $\{z \in \mathbb{C} : 2 < |z|\}$.

(Hinweis: Man verwende Partialbruchzerlegung.) (6 Punkte)

Aufgabe 4:
Für das Differentialgleichungssystem $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ bestimme man ein nicht-konstantes erstes Integral, d. h. eine nicht-konstante Funktion $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die längs der Lösungskurven $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ konstant ist. (6 Punkte)

Aufgabe 5:
Man berechne die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x'' + 2x' + 4x = \sin t.$$

(Hinweis: Eine partikuläre Lösung ergibt sich aus dem Ansatz $x(t) = a\cos t + b\sin t$.)

(6 Punkte)