Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Man bestimme alle Gleichgewichtspunkte des ebenen autonomen Systems

$$\begin{aligned} x' &= 2 - xy \\ y' &= \frac{x}{2} - y^3 \end{aligned}$$

und untersuche jeden der Gleichgewichtspunkte auf Stabilität, asymptotische Stabilität bzw. Instabilität.

Aufgabe 2:
Gegeben sei die skalare Differentialgleichung

$$x'(2x^3 + 2x + 2xt^2) = -2t^3 - 2x^2t.$$

Man zeige, dass jede Lösung $x(t)$

a) beschränkt bleibt,

b) nicht für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ existiert.

Hinweis: Man finde ein geeignetes erstes Integral $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so dass $F(x(t), t)$ unabhängig von t ist.

Aufgabe 3:

Für $|z| < r$ mit $r > 0$ sei $f(z) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergent.

a) Beweisen Sie für $0 < \rho < r$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\phi})|^2 \, \mathrm{d}\phi = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \rho^{2n}.$$

Hinweis: $\int_0^{2\pi} e^{ik\phi} d\phi = 0$ für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

b) Folgern Sie: Sei $\rho \in (0, r)$ fest. Ist $P \in \mathbb{C}[z]$ ein Polynom d-ten Grades, so ist

$$\int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\phi}) - P(\rho e^{i\phi})|^2 \, \mathrm{d}\phi$$

minimal für $P(z) = \sum_{n=0}^{d} a_n z^n$.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Es sei α reell.

a) Es bezeichne γ den positiv orientierten Halbkreis um den Ursprung vom Radius $R > 0$ mit Anfangspunkt $z = +R$ und Endpunkt $z = -R$. Zeigen Sie

$$\lim_{R\to+\infty} \int_\gamma \frac{e^{i\alpha z}}{1+z^2}\,\mathrm{d}z = 0 \qquad \text{für} \quad \alpha > 0.$$

b) Folgern Sie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi e^{-\alpha} \qquad \text{für} \quad \alpha > 0.$$

c) Berechnen Sie das Integral aus (b) auch für $\alpha \leq 0$.

Aufgabe 5:

a) Finden Sie die Laurentreihenentwicklung der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)^3(z^2+1)}$$

um $z_0 = -2$. Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der gefundenen Laurentreihe.

b) Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_{|z+1|=2} f(z)\,dz$. Der Integrationsweg wird in positiver Richtung (gegen den Uhrzeigersinn) durchlaufen.