Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Für die Differentialgleichung $u'(x) = \sqrt{1-u(x)^2}$ bestimmen Sie jeweils alle Lösungen $u : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ zu den Anfangswerten

a) $u(0) = 1$,

b) $u(0) = -1$.

(Hinweis: Auch wenn es nicht so aussieht, sind beide Fragen grundverschieden. Achten Sie unbedingt auf das Vorzeichen von u'. Eine Skizze des Graphen von u kann hilfreich sein.)

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie jeweils alle Lösungen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung $u'' - 10u' + 34u = 0$ für die Randwertprobleme

a) $u(0) = 0$, $u(\frac{\pi}{2}) = 1$;

b) $u(0) = 0$, $u(\pi) = 1$;

c) $u(0) = 0$, $u(\pi) = 0$.

Aufgabe 3:

Für jedes $E \in \mathbb{C}$, betrachten Sie die Differentialgleichung $H'' - 2zH' + (E-1)H = 0$ für eine Funktion H, die analytisch in der Variable z ist.

a) Bestimmen Sie die Lösungen der Form $H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^n$. Zeigen Sie, dass die Koeffizienten eine Rekursionsrelation erfüllen, die Sie angeben sollen.

b) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Reihe.

c) Geben Sie die geraden Lösungen an.

d) Für welche Werte von E ist die Lösung von (c) ein Polynom?

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

a) Bestimmen Sie ein maximales Gebiet $G \subset \mathbb{C}/\{-i, i\}$, das die Einheitskreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ enthält, und auf dem die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

eine Stammfunktion F besitzt.

b) Falls $F(0) = 0$, zeigen Sie

$$F(\tan(z)) = 0$$

für alle $z \in G' = \{z \in \mathbb{C} \mid \tan(z) \in G\}$.

Aufgabe 5:

Sei f meromorph auf $\mathbb{C}$ und ohne Pol auf der reellen Achse. Zudem gelte $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$, falls $\Im(z) \geq 0$, wobei $\Im(z) = y$ für $z = x + iy$.

a) Sei Γ_R der Weg in der oberen Halbebene gegeben durch $|z| = R$, orientiert im positiven Sinne. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)\, e^{iz}\, dz = 0\,.$$

b) Verwenden Sie (a), um das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix}\, dx$$

durch die Residuen von f auszudrücken.