Thema Nr. 2

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie die Lösung des linearen Anfangswertproblems $y' = Ay$, $y(0) = y_0$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 8 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y_0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2:

Seien σ, r und b positive Konstanten. Die *Lorenz–Gleichungen* lauten

$$\begin{aligned} x' &= \sigma(y - x), \\ y' &= rx - y - xz, \\ z' &= xy - bz. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass der Nullpunkt für $r > 1$ ein instabiler Gleichgewichtspunkt ist.

(b) Zeigen Sie sowohl durch Linearisierung als auch unter Verwendung der Lyapunov–Funktion $V(x, y, z) := x^2 + \sigma y^2 + \sigma z^2$, dass der Nullpunkt für $0 < r < 1$ ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt ist.

Aufgabe 3:

Es sei P ein nicht konstantes, komplexes Polynom vom Grad n mit den n nicht notwendig verschiedenen Nullstellen $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$. Zeigen Sie:

(a) Für beliebiges $z \in \mathbb{C} \setminus \{\zeta_1, \ldots, \zeta_n\}$ gilt

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z - \zeta_j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\overline{z - \zeta_j}}{|z - \zeta_j|^2}.$$

(b) Zu jeder Nullstelle ζ von P' gibt es nicht-negative reelle Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, so dass

$$\zeta = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \zeta_j \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$$

(d.h. die Nullstellen von P' liegen in der konvexen Hülle der Nullstellenmenge von P).

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Begründen Sie die Konvergenz der folgenden uneigentlichen Integrale und berechnen Sie ihren Grenzwert:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{z^4+1} \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^4-z^2}{z^6+z^4+z^2+1} dz.$$

Aufgabe 5:

Betrachten Sie das Polynom $p(z) := z^4 + 6z + 3 \in \mathbb{C}[z]$. Zeigen Sie:

(a) Alle Nullstellen von $p(z)$ liegen in $B_2(0)$, wobei $B_r(0) := \{z \mid \|z\| < r\}$ die offene Kugel um den Nullpunkt vom Radius $r > 0$ bezeichnet.

(b) Genau eine Nullstelle von $p(z)$ liegt in $B_1(0)$.

(c) Folgern Sie, dass $p(z)$ mindestens zwei reelle Nullstellen besitzt. Wie viele Nullstellen von $p(z)$ sind reell, wie viele liegen in der oberen und wie viele in der unteren Halbebene? Hat $p(z)$ doppelte Nullstellen?