Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Bei den folgenden Aufgaben sind alle Schlussfolgerungen und nichttrivialen Rechnungen mit einem erklärenden Text zu begründen! Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

Bezeichnungen: Sei $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ und $\overline{\mathbb{D}} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$.

Aufgabe 1:
(drei Kurzaufgaben zur Funktionentheorie)

a) Begründen Sie, dass die Funktion $f(z) = \frac{1}{z^2-2z+2}$ eine konvergente Potenzreihen-Entwicklung um $z = 0$ besitzt und geben Sie deren Konvergenzradius an.

b) Bestimmen Sie alle holomorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ mit $|f(z)| \geq \frac{1}{|z|}$ für alle $z \neq 0$.

c) Bestimmen Sie alle ganzen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f \circ f = f$.

Aufgabe 2:
Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) := z^3 + 2z + ce^{z^2}$ für alle $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| < e^{-1}$ genau eine Nullstelle im Einheitskreis $\overline{\mathbb{D}}$ besitzt.

Aufgabe 3:
Berechnen Sie für $\omega > 0$ das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{x^2+x+1} dx := \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \frac{e^{i\omega x}}{x^2+x+1} dx.$$

Hinweis: Betrachten Sie das obige Integral längs eines geeigneten, geschlossenen Wegs in der komplexen Ebene und gehen Sie zum „Grenzwert“ über. Führen Sie dabei alle nötigen Abschätzungen explizit aus.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Gegeben sei das ebene autonome System

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= y\cos x\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= \sin x.\end{aligned}$$

a) Begründen Sie, warum das obige System für jeden Anfangswert (x_0, y_0) eindeutig lösbar ist und warum die Lösungen für alle $t \in \mathbb{R}$ existieren.

b) Bestimmen Sie alle Ruhelagen des Systems und untersuchen Sie diese auf Stabilität.

Aufgabe 5:

Gegeben sei die homogene lineare Differentialgleichung 3. Ordnung

$$(*) \qquad \frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}t^3} + x = 0.$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $x(t)$ von $(*)$.

b) Bestimmen Sie alle Startwerte $\big(x(0), \dot{x}(0), \ddot{x}(0)\big) \in \mathbb{R}^3$, so dass für deren eindeutige Lösung $x(t)$ gilt:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$