Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Drei Fragen über Differentialgleichungen.

(a) Der Satz von Picard-Lindelöf über nichtautonome Differentialgleichungssysteme $\dot{x} = v(t,x)$ erster Ordnung, wobei $v : B \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung auf offenem $B \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ bezeichnet, macht noch eine Voraussetzung über v, nämlich die Lipschitzstetigkeit in der x-Variablen. Was heißt das?
Vervollständigen Sie dazu folgenden Satz:
Zu jedem $(t,x) \in B$ gibt es eine Umgebung ....

(b) Welche Dimension hat der Lösungsraum des linearen nichtautonomen Systems

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= t\dot{x}_3 \\ \ddot{x}_2 &= x_2 - t^2 x_3 \\ \ddot{x}_3 &= x_1 \end{aligned}$$

Geben Sie eine kurze Begründung an!

(c) Sei A eine reelle 2×2-Matrix. Die Lösungskurven des Systems $\dot{x} = Ax$ seien im Uhrzeigersinn nach außen drehende Spiralen. Welchen Schluss auf die Eigenwerte von A lässt das zu? Eigenwerte nur angeben!

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Drei Fragen zur Funktionentheorie.

(a) Hat jede holomorphe Funktion eine Stammfunktion? Begründung!

(b) Wo konvergiert die Laurentreihe $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} z^n$? Begründung!

(c) Nimmt die komplexe Sinusfunktion jeden Wert an? Begründung!

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ zwei C^∞-Funktionen, wir betrachten die Differentialgleichung 'mit getrennten Variablen' $\dot{x} = f(t)g(x)$. Sei x_0 eine Zahl zwischen zwei Nullstellen von g, d.h. $x_1 < x_0 < x_2$ und $g(x_1) = g(x_2) = 0$. Folgt aus diesen Angaben bereits, dass die maximale Lösung von $\dot{x} = f(t)g(x)$ zum Anfangswert $x(0) = x_0$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist? Beweisen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Bestimmen Sie alle auf ganz $\mathbb{C}$ definierten holomorphen Funktionen $f(z)$, welche $|f(z)| \le |\sin z|$ für alle $z \in \mathbb{C}$ erfüllen. Beweisen Sie Ihr Ergebnis!

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Konstruktion eines Arcustangens-Zweiges.
Beweisen Sie, dass es ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ und eine holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

(1) $\tan f(z) = z$ für alle $z \in G$,

(2) G ist maximal.

Mit *maximal* ist hier gemeint: Wenn $G_1 \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $G \subset G_1$ und $f_1 : G_1 \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z) = f_1(z)$ für alle $z \in G$ ist, dann folgt bereits $G = G_1$.