Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$u' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 1 \\ 2e^t \end{pmatrix}, \qquad u(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Betrachten Sie das Differentialgleichungssystem

$$x'' = -\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad y'' = -\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

für $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

a) Zeigen Sie, dass für Lösungen des Differentialgleichungssystems die beiden Größen

$$E = \tfrac{1}{2}((x')^2 + (y')^2) - \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{und} \quad M = xy' - x'y$$

unabhängig von t sind.

Anmerkung: Das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen beschreibt die Bewegung eines leichten Planeten im Gravitationsfeld eines (unendlich) schweren Sterns. E wird Energie genannt, M Moment. Dass E und M zeitunabhängig sind, bedeutet, dass sie Erhaltungsgrößen des Systems sind.

b) Welche Beziehung muss zwischen E und M erfüllt sein, damit $(x(t), y(t))$ eine Kreisbahn vom Radius $R > 0$ beschreibt?

Hinweis: Benutzen Sie Polarkoordinaten in der (x, y)-Ebene und drücken Sie E und M in diesen Koordinaten aus.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Gegeben sei ein lineares System erster Ordnung von gewöhnlichen Differentialgleichungen der Form

$$u' = Au$$

mit einer (2×2)-Matrix A mit komplexen Koeffizienten.

a) Welche Bedingung an die Eigenwerte und Eigenräume von A sind äquivalent damit, dass die triviale Lösung $u_0 \equiv 0$ stabil bei $t \to \infty$ ist, d.h. dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle Lösungen u mit $|u(0)| < \delta$ gilt: $|u(t)| < \varepsilon$ für alle $t > 0$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Fortsetzung nächste Seite!

b) Welche Bedingungen an die Eigenwerte von A sind äquivalent damit, dass die triviale Lösung sogar asymptotisch stabil ist, d.h. dass sie einerseits stabil ist und zusätzlich $|u(t)| \to 0$ bei $t \to \infty$ gilt für alle Lösungen mit $|u(0)| < \delta$? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Zeigen Sie:

a) Ist $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und gilt für ein $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{|h(z)|}{|z|^{n+1}} = 0\,,$$

so ist h eine komplexe Polynomfunktion vom Grad $\leq n$.

b) Ist $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und $\mathrm{Re}(h)$ beschränkt, so ist h konstant.

Aufgabe 5 (6 Punkte)

a) Eine meromorphe Funktion f sei in der Form $f(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^2}$ mit holomorphem $h(z)$ mit $h(z_0) \neq 0$ gegeben. Wie berechnet man das Residuum von f in z_0?

b) Geben Sie für die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(4+z^2)^2}$$

alle isolierten Singulariäten in $\mathbb{C}$ an samt ihrem Typ und bei Polen auch ihre Ordnung.

c) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx\,.$$