Thema Nr. 3

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

Bei den folgenden Aufgaben sind alle Schlussfolgerungen und nichttrivialen Rechnungen mit einem erklärenden Text zu begründen! Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktezahl beträgt 30 Punkte.

Aufgabe 1

Sei A eine reelle $n \times n-$Matrix derart, dass alle Eigenwerte von A nichtpositive Realteile besitzen (*d.h.*, $Re(\lambda_j) \leq 0$ für alle Eigenwerte λ_j von A).

a) Zeigen Sie: Falls alle Eigenwerte von A einfach sind und $x(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung $x'(t) = Ax(t)$ ist, dann bleibt $x(t)$ beschränkt, wenn $t \rightarrow +\infty$.

b) Zeigen Sie an einem Beispiel, dass die Behauptung in (a) nicht mehr richtig ist, wenn nicht alle Eigenwerte einfach sind!

c) Zeigen Sie: Ist A eine symmetrische Matrix, so bleibt $x(t)$ beschränkt, wenn $t \rightarrow +\infty$

Aufgabe 2

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$xy(x)\frac{dy}{dx}(x) = x^2 + y(x)^2, \qquad y(1) = 2.$$

(Hinweis: Es könnte nützlich sein, eine äquivalente Differentialgleichung für $w = \frac{y}{x}$ zu betrachten.)

Aufgabe 3

Es sei f eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$. Weiter sei entweder $z = \infty$ ein Pol von f, oder es habe f eine holomorphe Fortsetzung durch $z = \infty$.
Zeigen Sie, dass dann f eine rationale Funktion ist!

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4

Es bezeichne ln den Hauptzweig des natürlichen Logarithmus.

a) Zeigen Sie, dass $\ln z$ die offene rechte Halbebene $\mathbb{H}$ biholomorph auf den offenen Streifen $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C};\ \frac{-\pi}{2} < Im(z) < \frac{\pi}{2}\}$ abbildet!

$U = \{z \in \mathbb{C};\ 0 < Re(z) < 1\}$ sei ein offener Streifen und $\mathbb{D}$ der offene Einheitskreis mit Zentrum $z = 0$.

b) Bestimmen Sie eine biholomorphe Abbildung ψ_0, die U auf $\mathbb{D}$ abbildet!

c) Zeigen Sie, dass die Menge aller biholomorphen Abbildungen ψ von U auf $\mathbb{D}$ von der Form sind $\psi = h \circ \psi_0$, wobei h eine biholomorphe Abbildung von $\mathbb{D}$ auf sich ist (d.h. $h \in Aut(\mathbb{D})$)!

d) Bestimmen Sie alle biholomorphen Abbildungen ϕ von U auf $\mathbb{D}$, für die $\phi(\frac{1}{2}) = 0$ und $\lim_{y\to\infty} \phi(x + iy) = 1$ gilt, wobei $0 < x < 1$.

Aufgabe 5

Seien a und b positive reelle Zahlen. Berechnen Sie $\int_0^\infty \frac{cos(ax)}{x^2+b^2} dx$ und beweisen Sie die dazu nötigen Abschätzungen!