Thema Nr. 2

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

Bei den folgenden Aufgaben sind alle Schlussfolgerungen und nichttrivialen Rechnungen mit einem erklärenden Text zu begründen! Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktezahl beträgt 30 Punkte.

Aufgabe 1. Beweisen Sie folgende Aussagen:

i) Die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} z^n$$

hat den Konvergenzradius $\frac{1}{2}$.

ii) Ist $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} \big| |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe und $D \subsetneq \mathbb{C}$ eine diskrete und abgeschlossene Teilmenge, so ist jede holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \backslash D \to \mathbb{E}$ konstant.

iii) Es sei $A = \{z \in \mathbb{C} \big| \frac{1}{2} < |z| < 2\}$. Die holomorphe Funktion

$$f : A \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad z \longmapsto \frac{1}{z}$$

ist auf A nicht gleichmäßig durch Polynome in z approximierbar.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie den Wert des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos z}{(1+z^2)^2} dz,$$

indem Sie $\frac{\exp(-iz)}{(1+z^2)^2}$ über den Rand der Menge

$$M_r = \{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Im}(z) < 0 \text{ und } |z| < r\}$$

integrieren und anschließend den Grenzwert $r \to \infty$ bilden!

Aufgabe 3. Für zwei Zahlen $r, R \in \mathbb{R}$ mit $0 < r < R$ bezeichne $A_{r,R}$ den Kreisring $A_{r,R} = \{z \in \mathbb{C} | r < |z| < R\}$. Zu $a, b \in \mathbb{C} \backslash A_{r,R}$ betrachte man die holomorphe Funktion

$$f : A_{r,R} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad z \longmapsto \frac{z-b}{z-a}.$$

Ein holomorpher Logarithmus zu f ist eine holomorphe Funktion $l : A_{r,R} \to \mathbb{C}$, die der Gleichung $\exp \circ l = f$ genügt. Zeigen Sie, dass genau dann ein holomorpher Logarithmus zu f existiert, wenn a und b in derselben Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \backslash A_{r,R}$ liegen!

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4. Geben Sie ein Fundamentalsystem von Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$y' = \begin{pmatrix} 3 & 15 \\ -2 & -8 \end{pmatrix} \cdot y$$

an! Entscheiden Sie, ob der Nullpunkt in $\mathbb{R}^2$ ein stabiler Punkt dieses Systems ist!

Aufgabe 5. Es sei A eine nilpotente reelle $n \times n$-Matrix mit $A^k = 0$ und m eine ganze Zahl mit $m > k$. Zeigen Sie, dass für eine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ der Differentialgleichung $y' = Ay$ die Asymptotik

$$\lim_{t\to\infty} \frac{||y(t)||}{t^m} = 0$$

gilt!