Thema Nr. 1

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Bei den folgenden Aufgaben sind alle Schlussfolgerungen und nichttrivialen Rechnungen mit einem erklärenden Text zu begründen. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben.

Aufgabe 1: Sei A eine reelle $n \times n$-Matrix mit nur einem (n-fachen) Eigenwert μ.

(a) Begründen Sie, warum dann $(A - \mu E)^n = O$ ist (E = Einheitsmatrix, O = Nullmatrix).

(b) Folgern Sie aus (a), dass man die Exponentialmatrix e^{tA} für jedes $t \in \mathbb{R}$ als Produkt von $e^{\mu t}$ mit einer endlichen Summe von Matrizen ausdrücken kann.

(c) Wenden Sie (b) an, um die eindeutige Lösung $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ des Anfangswertproblems

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu ermitteln.

Aufgabe 2: Seien p und q stetige reelle Funktionen und sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

(a) Zeigen Sie, dass durch eine geeignete Transformation jeder positiven Lösung y der nichtlinearen Gleichung

$$(*) \qquad y' + p(x)y + q(x)y^\alpha = 0$$

eindeutig eine positive Lösung z der linearen Gleichung

$$(**) \qquad z' + (1-\alpha)p(x)z + (1-\alpha)q(x) = 0$$

zugeordnet werden kann.

(b) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' + y - x\sqrt{y} = 0, \quad y(0) = 0.$$

Ist die von Ihnen gefundene Lösung eindeutig?

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3: Eine komplexe Funktion f sei gegeben durch

$$f(z) = \frac{1+i}{z^2 - z - iz + i}.$$

(a) Finden Sie den Definitionsbereich und die Partialbruchentwicklung von f.

(b) Entwickeln Sie f in $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ in eine Taylorreihe und in $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{E}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ in eine Laurentreihe um 0.

(c) Für welche geschlossenen Wege Γ in $\mathbb{C}$ gilt $\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$?

Aufgabe 4: Sei $\lambda > 1$. Zeigen Sie, dass die Gleichung $e^{-z} + z = \lambda$ in der rechten Halbebene $H := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ genau eine Lösung besitzt. Ist diese Lösung sogar reell?

Aufgabe 5: Unter welchen Bedingungen an $a \in \mathbb{C}$ bildet die durch $f(z) = \dfrac{z-a}{z+a}$ definierte Möbiustransformation f die rechte Halbebene $H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ biholomorph auf den Einheitskreis $\mathbb{E} = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$ ab? Gibt es außer der angegebenen noch weitere Möbiustransformationen f, die die Bedingungen $f(H) = \mathbb{E}$ und $f(a) = 0$ erfüllen?