

Thema Nr. 3
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge sprachlich angemessen, nachvollziehbar und logisch exakt zu begründen. Für jede der 5 Aufgaben werden maximal 6 Punkte vergeben. Die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

Aufgabe 1:

- a) Die Funktion f sei auf $\mathbb{C}$ holomorph bis auf isolierte Singularitäten. Zeigen Sie: Für gerade f , d. h. $f(z) = f(-z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$, gilt die Aussage $\operatorname{res}_{-z} f = -\operatorname{res}_z f$, und für ungerade f , d. h. $f(z) = -f(-z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$, gilt die Aussage $\operatorname{res}_{-z} f = \operatorname{res}_z f$.
- b) Berechnen Sie die Residuen der folgenden Funktionen in allen ihren Singularitäten:

$$i) \quad \frac{z}{(z^2 + 1)(z^2 - 1)^2} \qquad ii) \quad \frac{\cos(z)}{(z^2 + 1)^2}$$

(2 + (2 + 2) Punkte)

Aufgabe 2:

Wir betrachten die folgenden fünf offenen Mengen (obere Halbebene H , erster Quadrant Q , rechter Einheitskreis K , Viertelkreis V und „Pac-Man“ P):

$$H = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}, \quad Q = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}, \quad K = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0, |z| < 1\}, \\ V = \{re^{i\phi} \mid r \in (0, 1), |\phi| < \pi/4\}, \quad P = \{re^{i\phi} \mid r \in (0, 1), |\phi| < 3\pi/4\}.$$

Ziel ist die Konstruktion einer biholomorphen Abbildung $f : H \rightarrow P$.

- a) Geben Sie jeweils eine biholomorphe Abbildung $g_1 : Q \rightarrow H$, $g_2 : V \rightarrow K$ und $g_3 : V \rightarrow P$ an.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass Abbildungen, die holomorph und bijektiv sind, biholomorph sind.

- b) Begründen Sie, dass die Möbius-Transformation $g_4 : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ auf der erweiterten komplexen Zahlenebene $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ mit

$$g_4(z) = i \frac{z - i}{z + i}$$

die Menge Q biholomorph auf die Menge K abbildet.

- c) Geben Sie eine biholomorphe Abbildung $f : H \rightarrow P$ an, indem Sie diese mithilfe von g_1 bis g_4 ausdrücken.

(3 + 2 + 1 Punkte)

Aufgabe 3:

Wir betrachten Lösungen $x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ des linearen Anfangswertproblems (AWP)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + v, \quad x(0) = x_0$$

für eine gegebene Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, Inhomogenität $v \in \mathbb{R}^2$ (unabhängig von der Zeit), und Anfangsdatum $x_0 \in \mathbb{R}^2$.

Begründen Sie jeweils, warum die folgenden Aussagen nicht für alle A wahr sind:

- a) Sind die Lösungen des homogenen AWP (also $v = 0$) für alle x_0 auf $[0, \infty)$ beschränkt, dann sind auch die Lösungen des inhomogenen AWP mit beliebigen v und x_0 auf $[0, \infty)$ beschränkt.
- b) Gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ für die Lösungen des homogenen AWP für alle x_0 , dann gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ auch für alle Lösungen des inhomogenen AWP mit beliebigen v und x_0 .
- c) Besitzt das homogene AWP für ein geeignetes x_0 eine auf $[0, \infty)$ unbeschränkte Lösung, dann ist jede Lösung des inhomogenen AWP zu diesem Anfangswert x_0 mit beliebigem $v \in \mathbb{R}^2$ unbeschränkt auf $[0, \infty)$.

(2 + 2 + 2 Punkte)

Aufgabe 4:

Gegeben sei die 3×3 -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestimmen Sie für das lineare Differentialgleichungssystem $x'(t) = Ax(t)$ diejenige Fundamentalmatrix $\Phi(t)$ für $t \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $\Phi(0)$ die Identitätsmatrix in $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ ist.
- b) Geben Sie alle $a \in \mathbb{R}^3$ an, für die die Lösung $x_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ des Anfangswertproblems

$$x'(t) = Ax(t), \quad x(0) = a$$

periodisch ist.

(4 + 2 Punkte)

Aufgabe 5:

- a) Für eine stetige Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sei die Folge $(f_n)_{n \geq 1}$ von Funktionen $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) = f\left(\frac{nx+1}{n+1}\right).$$

Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n \geq 1}$ gleichmäßig gegen f konvergiert.

- b) Zeigen Sie, dass die Funktion $\sqrt{\cdot} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ stetig aber nicht Lipschitz-stetig ist. Sie dürfen dabei die für alle reellen $x, x_0 \geq 0$ gültige Ungleichung $|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| \leq \sqrt{|x - x_0|}$ benutzen.
- c) Geben Sie ein Beispiel an für eine Folge $(g_n)_{n \geq 1}$ Lipschitz-stetiger Funktionen $g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, die gleichmäßig gegen eine nicht Lipschitz-stetige Funktion $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert.

(2 + 2 + 2 Punkte)