Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Alle Rechnungen und Schlussfolgerungen sind mit einem erklärenden Text zu versehen; Lösungen, die nur aus Rechnungen bestehen, erhalten keinen Punkt. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben.

Aufgabe 1

(3+3 Punkte) Beweisen Sie ausgehend von der Definition der Konvergenz einer reellen Folge:

a) Der Grenzwert einer konvergenten reellen Folge ist eindeutig bestimmt.

b) Die Summe zweier konvergenter reellen Folgen ist konvergent, und der Grenzwert der Summe ist die Summe der Grenzwerte.

Aufgabe 2

(2+2+2 Punkte) Gegeben sei die Fibonacci-Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, d. h. $f_0 = f_1 = 1$ und $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ für $n \geq 2$, sowie die Potenzreihe $F(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$. Sei $R \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ der Konvergenzradius von F.

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Quotientenkriteriums, dass $R \geq 1/2$.

b) Zeigen Sie, dass $(1 - z - z^2)F(z) = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < R$.

c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius R von F.

Aufgabe 3

(2+4 Punkte)

a) Begründen Sie, dass das Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2\cos(\theta) + \sin(\theta)}$$

existiert.

b) Bestimmen Sie den Wert dieses Integrals.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

(3+3 Punkte) Gegeben sei die reelle 2×2-Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem der Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$.

b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x} = Ax, x(0) = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 5:

(2+2+2 Punkte) Sei $g : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ eine stetige Funktion, so dass 0 die einzige Nullstelle von g ist. Betrachtet wird das Anfangswertproblem $\dot{x} = g(x), x(0) = x_0 \in [0, +\infty)$ mit Lösungsintervallen der Form $[0, a)$, $a \in (0, +\infty)$. Zeigen Sie:

a) Eine Lösung $\varphi : [0, a) \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems nimmt nur nichtnegative Werte an und ist monoton steigend. Ist $t \in [0, a)$ mit $\varphi(t) > 0$, so ist φ streng monoton steigend auf $[t, a)$.

b) Das Anfangswertproblem ist im Falle $x_0 > 0$ eindeutig lösbar.
Hinweis: Trennung der Variablen.

c) Gilt $\int_0^1 \frac{dx}{g(x)} = +\infty$, so ist das Anfangswertproblem im Falle $x_0 = 0$ eindeutig lösbar.