Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Alle Rechnungen und Schlussfolgerungen sind mit einem erklärenden Text zu versehen; Lösungen, die nur aus Rechnungen bestehen, erhalten keinen Punkt. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben.

Aufgabe 1:

(2 + 4 Punkte) Gegeben seien das Ellipsoid

$$E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 9\}$$

und die Funktion $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y, z) := x + 4y - 2z + 9 \quad \text{für } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

a) Begründen Sie, dass die Funktion f auf E ihr Maximum und Minimum annimmt.

b) Bestimmen Sie die Maximum- und Minimumstellen von f auf E.

Aufgabe 2:

(1 + 3 + 2 Punkte) Gegeben sei das autonome Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} \dot{x} &= 2 - xy^2 \\ \dot{y} &= (x-2)y \end{cases} .$$

a) Bestimmen Sie alle Ruhelagen des Systems.

b) Untersuchen Sie alle Ruhelagen auf asymptotische Stabilität.

c) Sei $J \subset \mathbb{R}$ das maximale Existenzintervall der eindeutigen Lösung mit Anfangswert $(x(0), y(0)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Begründen Sie, dass $y(t) > 0$ für alle $t \in J$ gilt.

Aufgabe 3:

(2+4 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\ddot{x} - x = e^t$$

b) Die Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &:= 1, \\ \varphi_2(t) &:= t, \\ \varphi_3(t) &:= t^2 \end{aligned}$$

Fortsetzung nächste Seite!

für alle $t \in \mathbb{R}$. Über eine lineare inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung ist bekannt, dass φ_1, φ_2 und φ_3 Lösungen sind. Geben Sie die Menge *aller* Lösungen dieser Differentialgleichung an. Die Differentialgleichung selbst brauchen Sie dabei nicht zu bestimmen.

Aufgabe 4:
(2 + 4 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen (gezählt mit Vielfachheiten) für die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, gegeben durch

$$f(z) = z^{42} - 5z^4 + \mathrm{i}z^3 + z^2 - \mathrm{i}z \quad \text{für } z \in \mathbb{C},$$

im offenen Einheitskreis $B_1(0) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

b) Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + x^2}{1 + x^4}\, dx.$$

Aufgabe 5:
(2+4 Punkte) Sei $G : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$G(x, y) := \begin{cases} y(x-1) & \text{für } y \leq x, \\ x(y-1) & \text{für } y > x. \end{cases}$$

a) Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass die Funktion $u : [0, 1] \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$u(x) := \int_0^1 G(x, y)\, f(y)\, dy \qquad \text{für } x \in [0, 1],$$

zweimal stetig differenzierbar ist mit

$$u''(x) = f(x) \text{ auf } [0, 1], \; u(0) = 0 = u(1).$$

b) Zeigen Sie, dass durch

$$u_0(x) := 0, \quad u_{n+1}(x) := \int_0^1 G(x, y) \cos(u_n(y))\, dy \qquad \text{für } x \in [0, 1] \text{ und } n \in \mathbb{N}_0$$

eine Folge stetiger Funktionen auf $[0, 1]$ definiert wird, die auf $[0, 1]$ gleichmäßig gegen eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $u : [0, 1] \to \mathbb{R}$ konvergiert mit

$$u''(x) = \cos(u(x)) \text{ auf } [0, 1], \; u(0) = 0 = u(1).$$